

Devoir de mathématiques n° 7 - 1èreS

18 décembre 2008 - 2H

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 - 2x + 5}{1 - x}$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Déterminer la limite de f en chacune des bornes de son ensemble de définition, et préciser les asymptotes éventuelles à la courbe \mathcal{C} .
2. Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{1 - x}$$

3. Montrer que \mathcal{C} admet une asymptote oblique Δ dont on précisera l'équation, et déterminer la position relative de \mathcal{C} et de Δ .
4. Montrer que la courbe \mathcal{C} admet un centre de symétrie dont on précisera les coordonnées.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 - x + 6}{x^2 - 3x + 2}$$

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. (a) Soit $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$; vérifier que 2 est racine de P , et en déduire une factorisation de P .
(b) Déterminer la limite de f en 2.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = 1 - x - \frac{1}{x}$$

et \mathcal{C} est sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ donnée en annexe.

1. Prouver que \mathcal{C} admet une asymptote Δ ; préciser leur position relative, et tracer Δ sur le graphique.
2. (a) Discuter graphiquement du nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ suivant les valeurs de m pour tout x dans \mathbb{R}^* .
(b) Justifier par le calcul (pour cela, montrer que $f(x) = m \Leftrightarrow -x^2 + (1 - m)x - 1 = 0$ sur \mathbb{R}^* , et étudier le signe de $\Delta_m = m^2 - 2m - 3$).
3. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^2 - 4x - 2$.
(a) Résoudre $f(x) = g(x)$ (on pourra vérifier que -1 est solution) et interpréter graphiquement le résultat.
(b) Résoudre $f(x) < g(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
(c) Construire sur le graphique donné en annexe Γ la courbe représentative de g .

Annexe à rendre avec la copie

