Devoir de mathématiques n^o 9 - 1èreS

5 février 2009 - 2H

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=3+\dfrac{4}{x}$.
On demande à Marta de calculer $f(2,003)$; sans calculatrice, elle répond $4,997$! Comment a-t-elle fait ?
(penser à une approximation affine de f au voisinage de 2)

Exercice 2 : On pose, pour $x \neq 1$, $f(x)=\dfrac{x^2-3x+6}{2(x-1)}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

1. Montrer que f est dérivable en tout point où elle est définie, et que pour tout réel $x \neq 1$:
$$f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{2(x-1)^2}$$
.
2. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, et interpréter graphiquement si possible.
3. Donner le tableau des variations de f, et préciser les extrémums.
4. (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel $x \neq 1$, on ait
$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$
   (b) En déduire l'existence d'une asymptote oblique à $\mathcal{C}$, dont vous donnerez une équation ;
   préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote.
5. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un centre de symétrie I.
6. Déterminer le(s) point(s) de $\mathcal{C}$, pour lesquels $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à la droite d d'équation $y=-\dfrac{3}{2}x$; donner alors les équations des tangentes éventuelles.
7. Tracer $\mathcal{C}$, en complétant avec tous les éléments de l'exercice.

Exercice 3 : Soit f la fonction $x \longmapsto 2x\sqrt{x}-3x$.

1. Pour quelles valeurs de x la fonction f est-elle définie ? Donner également le domaine de dérivation de f.
2. Etudier les limites de f aux bornes du domaine de définition.
3. Calculer la dérivée de f ; dresser le tableau de variation de f, et préciser si la fonction admet des extremums.
4. Etudier la limite
$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\geq 0}} \frac{f(h)-f(0)}{h},$$
   et donner une interprétation géométrique.

Exercice 4 :
Partie A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{4}{x}+2x^2$.

1. Calculer la dérivée de f et vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:
$$f'(x)=\frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$
.
2. Etudier le signe de f' et dresser le tableau de variations de f (les limites ne sont pas demandées).

Partie B : On construit un réservoir fermé en tôle, ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, de hauteur h et dont la base est un carré de côté x (l'unité de longueur est le mètre).

1. Exprimer la surface totale S de la tôle utilisée, puis le volume V du réservoir en fonction de x et h.
   On suppose maintenant que $V=1$ m^3.
2. Exprimer h en fonction de x, et en déduire l'expression de S en fonction de x.
3. A l'aide de la Partie A, déterminer x pour que la surface S soit minimale ; donner alors les dimensions du réservoir.