Devoir de mathématiques n^o 10 - 1èreS

18 février 2009 - 2H

Exercice 1 : Soit f, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 3}$$

.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Vérifier que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$:
$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(x^2 - 2x + 9)}{(x^2+3)^2}$$
et dresser le tableau des variations complet de f.
3. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2 + 3}$$
   (b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à $\mathcal{C}$; préciser leur position relative.
4. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à (D), et une seule ; déterminer une équation de cette tangente.

Exercice 2 : Dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on donne le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

1. Ecrire une équation de cercle $\mathcal{C}$.
2. On désigne par $\mathcal{C}'$ le demi-cercle supérieur de $\mathcal{C}$. Expliquer pourquoi $\mathcal{C}'$ est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ et déterminer l'ensemble de définition de f.
3. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et donner le coefficient directeur de la tangente Δ à $\mathcal{C}'$ en tout point $A(a; f(a))$ de son ensemble de dérivabilité.
4. Donner l'équation de Δ au point A d'abscisse $a = \frac{1}{2}$.
5. A l'aide du produit scalaire, déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}'$ au point A d'abscisse $a = \frac{1}{2}$ et comparer avec l'équation de Δ obtenue à la question précédente.

Exercice 3 :

1. A, B, C sont trois points alignés dans cet ordre ; O est un point pris sur la perpendiculaire en A à la droite (AB). Montrer que :
$$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$
2. Dans le cas de la figure ci-contre, en utilisant l'égalité précédente, calculer l'angle α au degré près.

Exercice 4 : Soit un triangle ABC ; on note H le projeté orthogonal de A sur $[BC]$ tel que $AB = 5$, $BH = 3$ et $CH = 2$.
Calculer les produits scalaires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 5 : Soit un rectangle $ABCD$ de centre O tel que $AB = 8$ et $BC = 6$.

1. (a) Montrer que pour tout point M, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2MO^2 - OA^2 - OB^2$
   (b) Déterminer puis tracer l'ensemble des points M qui vérifient : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 48$
2. (a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AC}$
   (b) Déterminer puis tracer l'ensemble des points M qui vérifient : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DM} = 20$