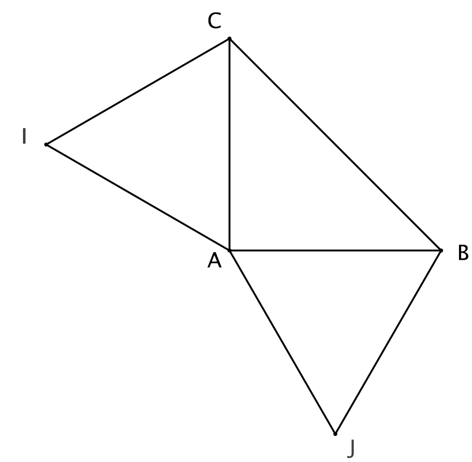
Devoir de mathématiques n^o 12 - 1èreS

26 mars 2009 - 2H

Exercice 1 :



On considère un triangle ABC direct, isocèle et rectangle en A ; on construit les deux triangles équilatéraux indirects AIC et BJA.
Le but de l'exercice est de montrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

1. (a) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AI})$.
   (b) En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AI})$.
2. (a) Quelle est la nature du triangle AJI ?
   (b) En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JA})$.
3. (a) Déterminer une mesure de chacun des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JB})$, $(\overrightarrow{JB}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.
   (b) En déduire une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{BC})$.
4. Déduire des questions 3) et 4) une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{BC})$: conclure.

Exercice 2 : On donne $\sin a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ avec $a \in [0; \dfrac{\pi}{2}]$.

1. Calculer $\cos 2a$ et $\sin 2a$.
2. Vérifier par le calcul que $\cos 4a = \sin a$.
3. Résoudre l'équation précédente pour en déduire la valeur exacte de a.

Exercice 3 :

1. Résoudre $\cos(2x - \dfrac{\pi}{3}) \geq \dfrac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi[$
2. Résoudre $\cos(3x) = \sin(x - \dfrac{\pi}{4})$ sur $]-\pi; \pi]$
3. On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -2$.
   (a) Vérifier que : $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos(x - \dfrac{\pi}{3})$.
   (b) Montrer que : $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -2 \iff \cos(x - \dfrac{\pi}{3}) = -1$
   (c) En déduire les solutions de $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

1. Dans un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, placer les points suivants :
$$A(4;0),\ B(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \text{ et } C \text{ tel que } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$
2. Déterminer les coordonnées polaires de A et B.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $OACB$? Déterminer les coordonnées polaires de C.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{3\pi}{8}$ et $\sin \dfrac{3\pi}{8}$.