Devoir de mathématiques n^o 13 - 1S7

7 mai 2009 - 2H

Exercice 1 — 4 points

1. Résoudre l'équation (E) : $\cos 3x = \sin 2x$ dans l'intervalle $[0;\pi]$.
2. Montrer que (E) est équivalente à : $4\cos^3 x - 2\cos x \sin x - 3\cos x = 0$.
3. En déduire alors que (E) est équivalente à : $\cos x = 0$ ou $\begin{cases} X = \sin x \\ 4X^2 + 2X - 1 = 0 \end{cases}$
4. En déduire la valeur exacte de $\sin \dfrac{\pi}{10}$

Exercice 2 — 3,5 points

Etudier le sens de variation des suites (u_n), (v_n) et (w_n), définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1. $u_n = \sqrt{n^2+2}$
2. $v_n = \dfrac{n^2}{2^n}$
3. $\begin{cases} w_0 = \dfrac{1}{2} \\ w_{n+1} = w_n(1-w_n) \end{cases}$

Exercice 3 — 2,5 points

On suppose que a, b et c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Déterminer ces nombres sachant que :

$$\begin{cases} a+b+c = 120 \\ abc = 59160 \end{cases}$$

Exercice 4 — 5 points

On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_0 = 0 \qquad et \qquad u_{n+1} = \frac{5u_n - 3}{u_n + 1}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 ; en déduire que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :
$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 1}$$
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
3. Exprimer v_n en fonction de n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Etudier la limite des suites (v_n) et (u_n).

Exercice 5 — 5 points

Soient (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = \frac{1}{4}(2^n + 4n - 5) \qquad et \qquad v_n = \frac{1}{4}(2^n - 4n + 5)$$

1. Déterminer les variations des suites (u_n) et (v_n).
2. Montrer que la suite (a_n) de terme général $a_n = u_n + v_n$ est géométrique ; calculer sa somme $S_a(n) = a_0 + a_1 + ... + a_n$.
3. Montrer que la suite (b_n) de terme général $b_n = u_n - v_n$ est arithmétique ; calculer sa somme $S_b(n) = b_0 + b_1 + ... + b_n$.
4. En déduire les sommes $S_u(n) = u_0 + u_1 + ... + u_n$ et $S_v(n) = v_0 + v_1 + ... + v_n$.