Correction du devoir n° 4 - 15

Ex 1 : 1) $x^2 - x\sqrt{3} - 18 < 0$ $\quad \Delta = 3 - 4\times(-18) = 75$

$\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ deux racines $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{3}+5\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{3}-5\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3} \end{cases}$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$3\sqrt{3}$		$+\infty$
$x^2 - x\sqrt{3} - 18$ ($a=1$)		+	0	−	0	+	
		du signe de a		de −a		de a	

(1)

$S =]-2\sqrt{3} ; 3\sqrt{3}[$

2) $\dfrac{2x^2 - 10x - 5}{x-1} = x - 3$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ (1,25)

$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x - 5 = (x-3)(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x - 5 = x^2 - 4x + 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 8 = 0$

$\Delta = 36 + 32 = 68$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

deux racines $\begin{cases} x_1 = \dfrac{6+2\sqrt{17}}{2} = 3+\sqrt{17} \\ x_2 = 3 - \sqrt{17} \end{cases}$

$S = \{3-\sqrt{17} ; 3+\sqrt{17}\}$

3) $\dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{2}{x+1} \geqslant -1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-2 ; -1\}$ 0,25

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(x+1) - 2(x+2) + 1\times(x+2)(x+1)}{(x+2)(x+1)} \geqslant 0$ (2)

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 1 - 2x - 4 + x^2 + 3x + 2}{(x+2)(x+1)} \geqslant 0$

Soit $N(x) = 2x^2 + x - 3$
$= 2(x-1)(x + 3/2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2 + x - 3}{(x+2)(x+1)} \geqslant 0$ 0,5

(ou $\Delta = 25$ $\sqrt{25} = 5$ $x_1 = 1$ et $x_2 = -3/2$)

x	$-\infty$		-2		$-3/2$		-1		1		$+\infty$
$2x^2+x-3$		+		+	0	−		−	0	+	
$x+2$		−		+		+		+		+	
$x+1$		−		−		−		+		+	
$\dfrac{2x^2+x-3}{(x+2)(x+1)}$		+	‖	−	0	+	‖	−	0	+	

du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines

1

0,25

$S =]-\infty ; -2[\cup [-3/2 ; -1[\cup [1 ; +\infty[$

4) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 \geqslant 0 \\ X^2 - X - 12 = 0 \end{cases}$

$X^2 - X - 12 = 0$ $\quad X \geqslant 0$

$\Delta = 1 - 4\times(-12) = 49$ $\quad \sqrt{49} = 7$

deux racines

$\begin{cases} X_1 = \dfrac{1+7}{2} = 4 \\ X_2 = \dfrac{1-7}{2} = \cancel{-3} \end{cases}$ (1,25)

$\Leftrightarrow x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$

$S = \{-2 ; 2\}$

5) $\sqrt{4x^2-9x+2} = x-2$ 1,5

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4x^2-9x+2=(x-2)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2-9x+2 = x^2-4x+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 3x^2-5x-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 2$ $S=\{2\}$

$3x^2-5x-2=0$

$\Delta = 25 - 4\times 3 \times(-2) = 49$

deux racines

$\begin{cases} x_1 = \frac{5+7}{6} = 2 \quad (\geq 2) \\ x_2 = \cancel{\frac{5-7}{6} = \frac{-1}{3}} < 2 \end{cases}$

---

6) $6x - 13\sqrt{x} + 5 = 0$ sur $[0;+\infty[$ 1,5

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \sqrt{x} \geq 0 \\ 6X^2 - 13X + 5 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{3} = \sqrt{x}$ ou $\frac{1}{2} = \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x = \frac{25}{9}$ ou $x = \frac{1}{4}$

$6X^2 - 13X + 5 = 0 \quad X \geq 0$

$\Delta = 169 - 4\times 6 \times 5 = 49$

deux racines

$\begin{cases} X_1 = \frac{13+7}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \\ X_2 = \frac{13-7}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{cases}$

$S = \{\frac{1}{4}; \frac{25}{9}\}$

---

7) $\sqrt{x^2+2x-3} = \sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ x^2+2x-3 = 1-x \end{cases}$

① $1-x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x$

② $x^2+2x-3 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+3) \geq 0$ racines apparentes

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
x^2+2x-3 $a=1$		+	ϕ	−	ϕ	+	

signe de a de $-a$ de a

$x \leq -3$ ou $x \geq 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq -3 \text{ ou } x \geq 1 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \text{ ou } x = 1 \\ (x-1)(x+4) = 0 \text{ racines apparentes} \end{cases}$ 2

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \text{ ou } x = 1 \\ x = 1 \text{ ou } x = -4 \end{cases}$

$S = \{-4; 1\}$

8) $\left(\frac{x}{x+2}\right)^2 - 6\left(\frac{x}{x+2}\right) + 5 = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$\iff \begin{cases} X = \frac{x}{x+2} \\ X^2 - 6X + 5 = 0 \end{cases}$ | $X^2 - 6X + 5 = 0$
$\iff (X-1)(X-5) = 0$
$\iff X = 1$ ou $X = 5$

$\iff \frac{x}{x+2} = 1$ ou $\frac{x}{x+2} = 5$

$\iff x = x+2$ ou $x = 5x + 10$

$\iff 0 = 2$ impossible ou $4x = -10$

$\iff x = -5/2$ $S = \{-5/2\}$

1,5

Ex2 : $P(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$ sur $\mathbb{R}$

0,25

1) $P(3) = 3^3 + 3^2 - 17\times3 + 15$
$= 27 + 9 - 51 + 15 = 0$ 3 est racine de P

2) $P(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$ (directement $a=1$ et $c=-5$)
$= ax^3 + bx^2 + cx - 3ax^2 - 3bx - 3c$

3,5

$= ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-3b)x - 3c$

1,5

par identification des coefficients $\iff \begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = 1 \\ c - 3b = -17 \\ -3c = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ -5 - 12 = -17 \text{ vérifié} \\ c = -5 \end{cases}$

donc $P(x) = (x-3)(x^2 + 4x - 5)$ 0,25

3) $P(x) \geq 0 \iff (x-3)(x^2 + 4x - 5) \geq 0$
$\iff (x-3)(x-1)(x+5) \geq 0$

x	$-\infty$		-5		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = [-5 ; 1] \cup [3 ; +\infty[$

1,5

$S =$

Ex3 : (E) : $(m+1)x^2+(m+1)x+m=0$

1) (E) n'est pas une équation du second degré 0,75

$\Leftrightarrow$ $m+1=0$ $\Leftrightarrow$ $m=-1$

On obtient alors $-1=0$ impossible $S=\phi$

2) Soit $m\neq-1$

ⓐ -2 est racine de (E)

4,5 $\Leftrightarrow$ $4(m+1)-2(m+1)+m=0$ 0,75

$\Leftrightarrow$ $3m+2=0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{m=-2/3}$

ⓑ (E) admet une seule solution

$\Leftrightarrow$ $\Delta_m=0$ $\Leftrightarrow$ $(m+1)^2-4(m+1)\times m=0$

0,25 $\Leftrightarrow$ $m^2+2m+1-4m^2-4m=0$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{-3m^2-2m+1=0}$ 0,5

$\Delta=4+4\times3=16$ $\sqrt{\Delta}=4$

$$\begin{cases} m_1=\dfrac{2+4}{-6}=-1 & \text{impossible} \\ m_2=\dfrac{2-4}{-6}=1/3 \end{cases}$$

0,5 Donc (E) admet une seule solution quand $m=\frac{1}{3}$

Alors (E) s'écrit $\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=0$

$\Leftrightarrow$ $4x^2+4x+1=0$ $S=\{-1/2\}$

0,5 $\Leftrightarrow$ $(2x+1)^2=0$ $\Leftrightarrow$ $x=-1/2$

ⓒ $(m+1)x^2+(m+1)x+m<0$ sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow$ $\Delta_m<0$ et $(m+1)<0$ 0,5 $\Leftrightarrow$ $m<-1$ 0,25

m	$-\infty$	-1		$1/3$	$+\infty$
$\Delta_m=-3m^2-2m+1$ $a=-3$	$-$ signe de a	‖	$+$ de $-a$	0	$-$ de a

0,5