Devoir de mathématiques n^o 7 - 1èreS

3 février 2011 - 1/2H

Exercice 1 /6,5

Pour chacune des fonctions suivantes, écrire son domaine de définition et son domaine de dérivabilité, puis déterminer sa fonction dérivée. Simplifier les expressions obtenues.

1. $f_1(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 1$
2. $f_2(x) = \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{1}{x}$
3. $f_3(x) = (1+\sqrt{x})(5 - \dfrac{x^3}{3})$
4. $f_4(x) = (2 - x^5)(4x - 1)$
5. $f_5(x) = \dfrac{-4x+1}{3x-5}$
6. $f_6(x) = \dfrac{4x^2 - x + 3}{x^2 + x + 7}$

1) f_1 définie dérivable sur $\mathbb{R}$ $\quad f_1(x) = 12x^2 - 10x + 3$ 0,5

2) f_2 déf dériv sur $\mathbb{R}^*$ $\quad f_2(x) = -3 \times \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{-9}{x^4} + \dfrac{1}{x^2}$ 1

3) f_3 déf sur $[0;+\infty[$ dériv sur $]0;+\infty[$

$f_3(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(5 - \dfrac{x^3}{3}\right) + (1+\sqrt{x}) \times \dfrac{-3x^2}{3} = \dfrac{15 - x^3}{6\sqrt{x}} - x^2(1+\sqrt{x})$ 1

4) f_4 définie dériv sur $\mathbb{R}$ $\quad f_4(x) = -5x^4(4x-1) + (2-x^5) \times 4$

$= -20x^5 + 5x^4 + 8 - 4x^5$

$= -24x^5 + 5x^4 + 8$

1

5) f_5 déf dériv sur $\mathbb{R} \setminus \{5/3\}$ $\quad f_5(x) = \dfrac{-4(3x-5) - (-4x+1) \times 3}{(3x-5)^2}$

$= \dfrac{17}{(3x-5)^2}$

1

6) $D(x) = x^2 + x + 7 \quad \Delta = 1 - 4 \times 7 = -27 \quad \Delta < 0$ donc $D(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$

0,5

f_6 est déf dériv sur $\mathbb{R}$

$f'_6(x) = \dfrac{(8x-1)(x^2+x+7) - (4x^2 - x + 3) \times (2x+1)}{(x^2+x+7)^2}$

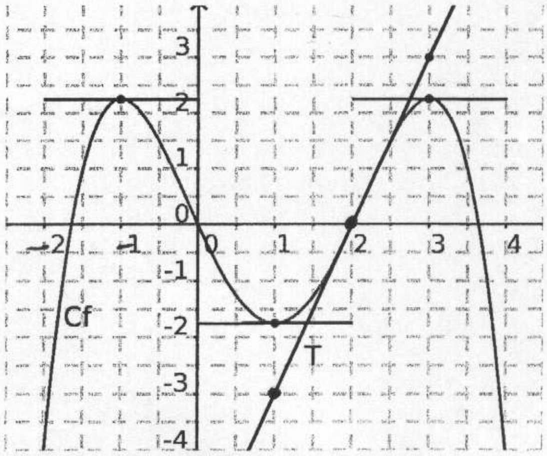
$= \dfrac{\cancel{8x^3} + 8x^2 + 56x - x^2 - x - 7 - \cancel{8x^3} - 4x^2 + 2x^2 + x - 6x - 3}{(x^2+x+7)^2}$

1,5

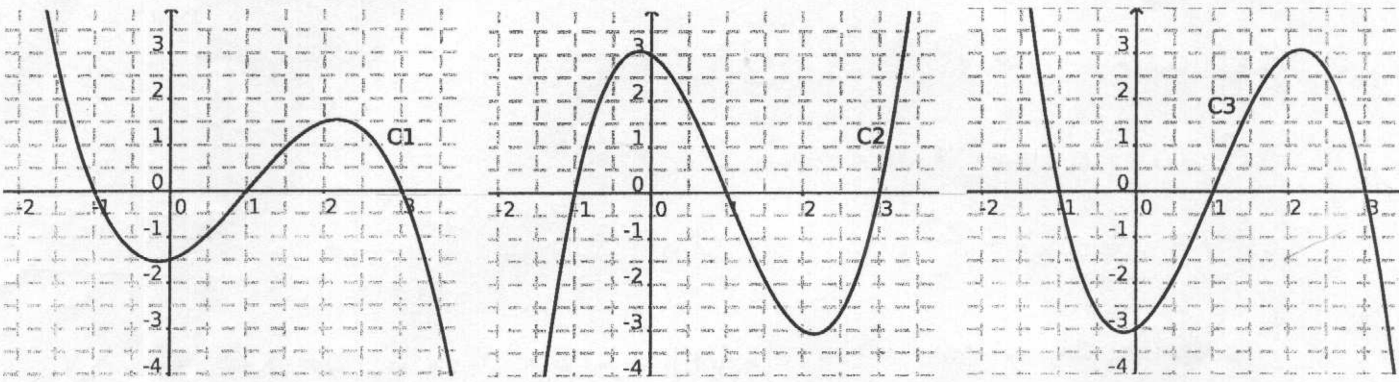
$= \dfrac{5x^2 + 50x - 10}{(x^2+x+7)^2} = \boxed{\dfrac{5(x^2 + 10x - 2)}{(x^2+x+7)^2}}$

Exercice 2 /3,5

On a représenté ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.



1. Déterminer le signe de $f'(x)$.
2. Déterminer graphiquement $f'(-1)$, $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.
3. Donner une équation de la droite T tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 2.
4. Parmi les trois courbes ci-dessous C_1, C_2 et C_3, quelle est la courbe associée à la fonction f' ?



1) f croissante sur $]-\infty; -1] \cup [1;3]$ et décroissante sur $[-1;1] \cup [3;+\infty[$
alors

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

1

2) $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1.

0,5 $f'(-1) = f'(1) = f'(3) = 0$ tangentes horizontales
0,25

0,5 $f'(2) = 3$

3) T : $y = 3x + b$ ou $y = 3(x-2) + f(2)$
$A(2;0) \in T$ $f(2) = 0$
donc $0 = 6 + b \Leftrightarrow b = -6$ $\rightarrow y = 3x - 6$
$T : y = 3x - 6$
0,5

4) C_2 est exclue puisque la courbe doit être au-dessus de l'axe des abscisses sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;3]$
0,75 de plus $f'(2) = 3$ donc $\mathcal{C}_3$ représente f'