Devoir de mathématiques n^o 8 - 1èreS

8 février 2011 - 2H

Exercice 1
(2 points)

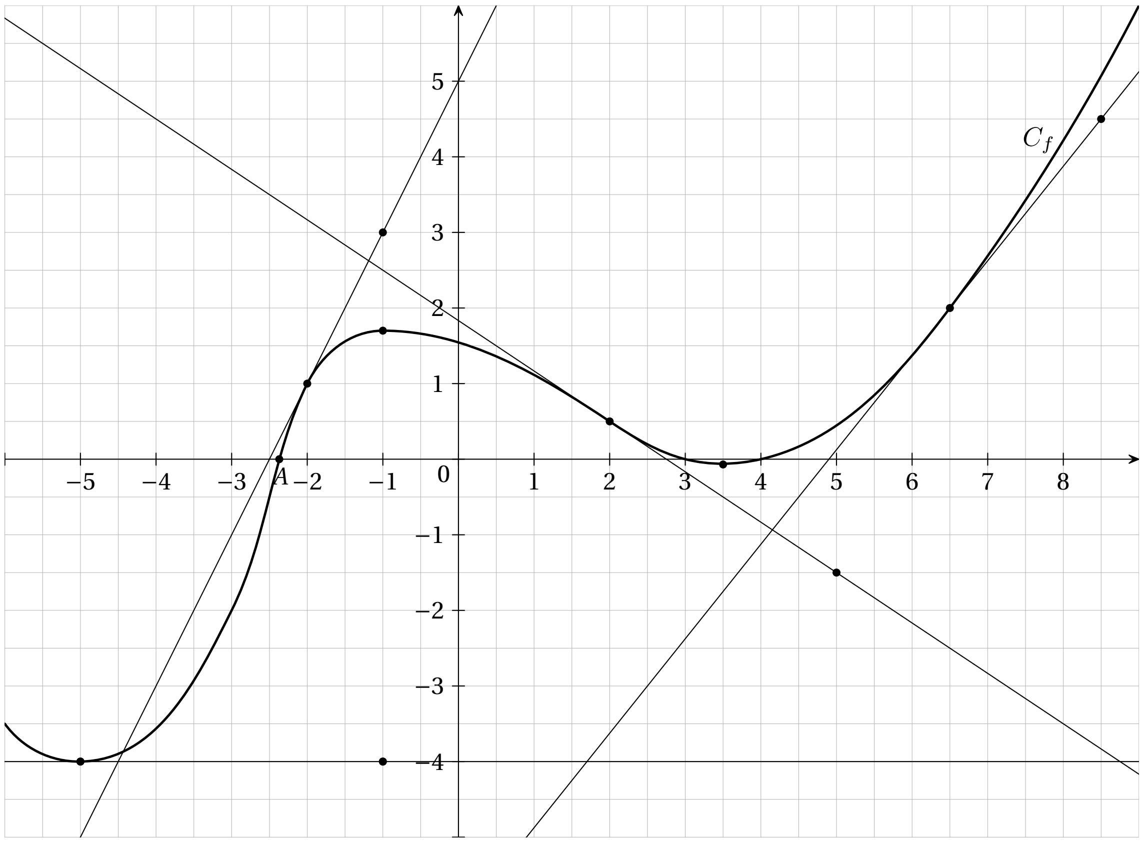
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

En utilisant le taux de variation de f, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, et déterminer sa fonction dérivée.

Exercice 2
(3 points)

Voici la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $[-6;9]$ avec quatre de ses tangentes.

Le point A de coordonnées $(-2,4;0)$, appartient à la courbe C_f



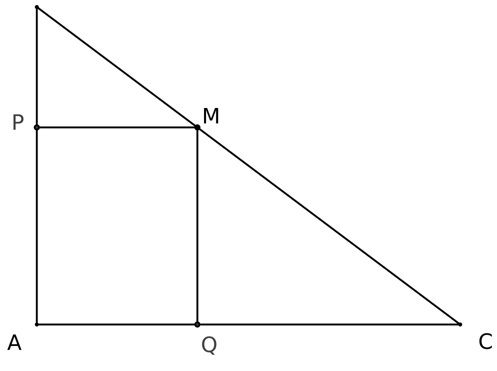
1. D'après le graphique, donner les valeurs de $f'(-5)$, $f'(-2)$, $f'(2)$ et $f'(6,5)$ (justifier).
2. On sait que $f'(-3) = 2$; tracer T_{-3}, tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -3.
3. Résoudre graphiquement sur $[-6;9]$: a) $f(x) > 0$ b) $f'(x) > 0$

Exercice 3
(3,5 points)

ABC est un triangle rectangle en A avec $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 5$;

M est un point de $[BC]$ tel que $BM = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 5)$.

Le but est de savoir comment placer M pour que l'aire du quadrilatère $APMQ$ soit maximale.



1. Exprimer PM et MQ en fonction de x.
2. Justifier que l'aire de $APMQ$ s'écrit $f(x) = \dfrac{12}{25}x(5-x)$.
3. Etudier f sur $[0;5]$ et répondre au problème posé.

Exercice 4

(11,5 points)

Soient f et g les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 \qquad\qquad g(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x - 1}$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonomal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1ère Partie : Etude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f.
2. Calculer f' la fonction dérivée de f, puis dresser le tableau de variations de f.

2ème Partie : Etude de la fonction g

1. Déterminer les limites de la fonction g et interpréter graphiquement.
2. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que
$$g(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}$$
   (b) En déduire que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathscr{C}_g$; déterminer la position relative de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}_g$.
3. Calculer g' la fonction dérivée de g, puis dresser le tableau de variations de g.

3ème Partie :

1. (a) Vérifier que $f(x) = g(x) \iff x(x+1)(x-2)(2x-3) = 0$
   (b) En déduire les coordonnées de tous les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. (a) Déterminer l'équation de la droite (T), tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.
   (b) En quels points $\mathscr{C}_g$ admet-elle une tangente parallèle à (T) ?
3. Construire les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans le repère ci-joint.