Correction du devoir n° 9 - 1·S

Ex1 $A(-1;-2)$, $B(2;4)$, $C(6;2)$

2

1) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$ $\quad \vec{AB}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 21+24 = 45$

$AB^2 = 9+36 = 45$ et $AC^2 = 49+16 = 65$

donc $45 = \sqrt{45}\sqrt{65}\cos\widehat{BAC}$ et $\cos\widehat{BAC} = \sqrt{\frac{45}{65}} = \sqrt{\frac{9}{13}}$

$\boxed{\cos\widehat{BAC} = \frac{3}{\sqrt{13}}} \rightsquigarrow \widehat{BAC} \simeq 34°$

1,5

2) $\vec{BC}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AB}\cdot\vec{BC} = 12-12 = 0$ donc $(AB)\perp(BC)$

ABC rectangle en B

0,5

Ex2 EFGH rectangle, M milieu de [FG] donc $\vec{FM} = \frac{1}{2}\vec{FG}$

$\vec{HK} = \frac{1}{3}\vec{HG}$

5,5

1) $\vec{EK}\cdot\vec{EM} = (\vec{EH}+\vec{HK})\cdot(\vec{EF}+\vec{FM})$

$= \underbrace{\vec{EH}\cdot\vec{EF}}_{0} + \vec{EH}\cdot\vec{FM} + \vec{HK}\cdot\vec{EF} + \underbrace{\vec{HK}\cdot\vec{FM}}_{0}$

$(EF)\perp(EF)$ $\qquad (HK)\perp(FM)$

$= \vec{EH}\cdot\frac{1}{2}\vec{FG} + \frac{1}{3}\vec{HG}\cdot\vec{HG}$ $\qquad \vec{HG} = \vec{EF}$ et $\vec{FG} = \vec{EH}$

1,5 $\quad = \frac{1}{2}EH^2 + \frac{1}{3}HG^2 = \frac{4}{2} + \frac{9}{3} = 2+3 = 5$

2) a) $\vec{EK}\cdot\vec{EM} = \vec{EL}\cdot\vec{EM}$ $\quad$ L projeté orthogonal de K sur (EM)

0,75 $\quad = 5$ $\qquad 5>0$ donc $\vec{EL}$ et $\vec{EM}$ colinéaires de même sens.

donc $EL \times EM = 5$

Dans EFM rectangle en F d'après le théorème de Pythagore :

$EM^2 = EF^2 + FM^2$

$\Leftrightarrow EM^2 = 9 + 1^2$

$\Leftrightarrow EM^2 = 10 \Leftrightarrow EM = \sqrt{10}$ 0,75

0,5 Alors $EL\sqrt{10} = 5 \Leftrightarrow EL = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$

b) $\vec{EK}\cdot\vec{EM} = EK \times EM \times \cos\widehat{KEM} = 5$ 0,25

Dans EKH rectangle en H d'après le théorème de Pythagore :

$EK^2 = EH^2 + HK^2$ $\qquad \vec{HK} = \frac{1}{3}\vec{HG}$

$\Leftrightarrow EK^2 = 4 + 1$

$\Leftrightarrow EK^2 = 5 \Leftrightarrow EK = \sqrt{5}$ 0,75

Alors $\sqrt{5}\sqrt{10}\cos\widehat{KEM} = 5 \Leftrightarrow \cos\widehat{KEM} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

1 $\quad \cos\widehat{KEM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Donc $\widehat{KEM} = \frac{\pi}{4}$ rad

(Ex 3 1) ⓐ $\mathcal{E}_1 = \{M / \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 10\}$; $AB = 6$ (0,5)

Soit H_1 projeté orthogonal de M sur (AB)

$M \in \mathcal{E}_1 \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = 10 \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH_1} = 10$ $(10>0)$

$\iff AB \times AH_1 = 10$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH_1}$ de même sens

$\iff AH_1 = \frac{5}{3}$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH_1}$ de même sens

$\mathcal{E}_1$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H_1 1,5

ⓑ $\mathcal{E}_2 = \{M / \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -12\}$

Soit H_2 projeté orthogonal de M sur (AB) $(-12<0)$

$M \in \mathcal{E}_2 \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = -12 \iff \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH_2} = -12$

$\iff AB \times AH_2 = 12$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH_2}$ de sens opposés

$\iff AH_2 = 2$ et $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH_2}$ de sens opposés

$\mathcal{E}_2$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H_2

1,5

2) ⓐ $\mathcal{F}_1 = \{M / \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0\}$

$M \in \mathcal{F}_1 \iff \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0 \iff (MA) \perp (MB)$

$\mathcal{F}_1$ est le cercle de diamètre $[AB]$ 0,5

ⓑ $\mathcal{F}_2 = \{M / \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = -9\}$ Soit I milieu de $[AB]$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$

$= MI^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\underbrace{(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})}_{0} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$ 1

$= MI^2 - IA^2 = MI^2 - 3^2 = MI^2 - 9$

$M \in \mathcal{F}_2 \iff MI^2 - 9 = -9 \iff MI^2 = 0 \iff M = I$

$\mathcal{F}_2$ se réduit au point I

0,5

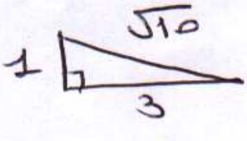
ⓒ $\mathcal{F}_3 = \{M / \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 1\}$

$M \in \mathcal{F}_3 \iff MI^2 - 9 = 1 \iff MI^2 = 10 \iff MI = \sqrt{10}$

$\mathcal{F}_3 = \mathcal{C}(I, \sqrt{10})$

0,5

3) 1



Attention à l'unité

$\frac{5}{3}$!!

Ex4 Première méthode dans $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$ orthonormal 16

1) $A(0;0)$ $B(1;0)$ $D(0;1)$ $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{AB}$ 0,5

0,25 ABCD carré donc $C(1;1)$

$\vec{DM} = x\vec{DB} \Leftrightarrow \vec{DA} + \vec{AM} = x(\vec{DA} + \vec{AB})$ donc $M(x;1-x)$ 0,5

$\Leftrightarrow \vec{AM} = x\vec{AB} + (1-x)\vec{AD}$

Q projeté orthogonal de M sur (AB) donc $Q(x;0)$

P projeté orthogonal de M sur (AD) donc $P(0;1-x)$

0,75

2) $\vec{CP}\begin{pmatrix}-1\\-x\end{pmatrix}$ $\vec{DQ}\begin{pmatrix}x\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{CP}\cdot\vec{DQ} = -x + x = 0$

donc $(CP) \perp (DQ)$ 0,5

Deuxième méthode

1) $\vec{DP}\cdot\vec{DA} = DP \times DA = DP$ → $\vec{DP}$ et $\vec{DA}$ colinéaires de même sens et $DA = 1$

0,75 $\vec{AQ}\cdot\vec{AB} = AQ \times AB = AQ$ → $\vec{AQ}$ et $\vec{AB}$ colinéaires de même sens et $AB = 1$

Dans le triangle ABD rectangle en A

- P sur [AD] d'après le théorème de Thalès
- M sur [BD]
- (PM) // (AB)

$$\frac{DP}{DA} = \frac{MP}{AB} = \frac{DM}{DB} \qquad AD = AB = 1$$ 1

donc $DP = MP$

or $MQ = AQ$ car AQMP rectangle (3 angles droits)

Donc $\vec{DP}\cdot\vec{DA} = DP \times DA = AQ \times AB = \vec{AQ}\cdot\vec{AB}$ 0,25

2) $\vec{CP}\cdot\vec{DQ} = (\vec{CD} + \vec{DP})\cdot(\vec{DA} + \vec{AQ})$

$= \underbrace{\vec{CD}\cdot\vec{DA}}_{\substack{0\\(CD)\perp(DA)}} + \underbrace{\vec{CD}\cdot\vec{AQ}}_{\vec{CD} = \vec{BA}} + \vec{DP}\cdot\vec{DA} + \underbrace{\vec{DP}\cdot\vec{AQ}}_{\substack{0\\(DP)\perp(AQ)}}$

$= \vec{BA}\cdot\vec{AQ} + \vec{DP}\cdot\vec{DA}$

$= -\vec{AB}\cdot\vec{AQ} + \vec{AQ}\cdot\vec{AB} = 0$

0,5

donc $(CP) \perp (DQ)$