Correction du devoir n° 11 - 1 S

Ex1 : 1) $\mathcal{D} : 2x + y + 3 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ vecteur normal de Δ puisque $\Delta \perp \mathcal{D}$

donc $\Delta : -x + 2y + c = 0$

2 or $A(-4;5) \in \Delta \iff 4 + 10 + c = 0 \iff \underline{c = -14}$

Donc $\Delta : \boxed{-x + 2y - 14 = 0}$ une équation cartésienne

2) $M(x;y) \in \mathcal{C}(I;3)$ avec $I(-2;3)$

$\iff IM = 3 \iff IM^2 = 9 \iff (x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$

2 $\iff \boxed{x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0}$ une équation de $\mathcal{C}$

3) $M(x;y) \in \mathcal{C}'$ de diamètre $[AB]$ $A\left(\frac{2}{3};-2\right)$ $B\left(3;\frac{5}{3}\right)$

$\iff (AM) \perp (BM) \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - \frac{2}{3}\\y+2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-3\\y-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$

2 $\iff \left(x - \frac{2}{3}\right)(x-3) + (y+2)\left(y - \frac{5}{3}\right) = 0$

$\iff x^2 - 3x - \frac{2}{3}x + 2 + y^2 - \frac{5}{3}y + 2y - \frac{10}{3} = 0$

$\iff \boxed{x^2 + y^2 - \frac{11}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{4}{3} = 0}$ une équation de $\mathcal{C}'$

Ex2 : 1) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$

$\iff (x+1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + 5 = 0$

1,5 $\iff (x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$ équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(-1;3)$ de rayon $\sqrt{5}$

2) on pose $x = 0$ et on résoud $y^2 - 6y + 5 = 0$

$\Delta = 36 - 20 = 16$ $\left\{\begin{array}{l} y_1 = \frac{6+4}{2} = 5 \\ y_2 = \frac{6-4}{2} = 1\end{array}\right.$

1,75 $\sqrt{\Delta} = 4$

Donc $\mathcal{C}$ coupe (Oy) aux points $A(0;1)$ et $B(0;5)$

On pose $y = 0$ et on résoud $x^2 + 2x + 5 = 0$

$\Delta = 4 - 20 = -16$ donc $\mathcal{C}$ ne coupe pas (Ox)

1 $\Delta < 0$ pas de solution

3) T tangente à $\mathcal{C}$ en A

$\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y-1\end{pmatrix}$

$M(x;y) \in T \iff (AM) \perp (IA)$

$\iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{IA} = 0$

1,75 $\iff 1 \times x + (-2)(y-1) = 0$

$\iff \boxed{x - 2y + 2 = 0}$ une équation de T

4) Dans le triangle IAB isocèle en I d'après Al-Kashi : $IB^2 = AB^2 + IA^2 - 2AB \times IA \times \cos \widehat{IAB}$

2 or $\begin{cases} IA = IB = \sqrt{5} \text{ (rayon du cercle)} \\ AB = 4 \end{cases}$

Donc $5 = 16 + 5 - 2 \times 4 \times \sqrt{5} \cos \widehat{IAB}$

$\iff \cos \widehat{IAB} = \dfrac{16}{8\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $\boxed{\widehat{IAB} \simeq 26{,}6°}$

Ex3 : 1) $\mathcal{C} = \{ M \in \mathcal{P} / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 16 \}$

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$

$= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$

I milieu de $[AB]$ donc $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$

Alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA})}_{\vec{0}} + \overrightarrow{IA} \cdot (-\overrightarrow{IA})$

$= MI^2 - IA^2$

$AB = 6$ donc $IA = 3$ et $IA^2 = 9$

3 D'où $M \in \mathcal{C} \iff MI^2 - IA^2 = 16 \iff MI^2 - 9 = 16$

$\iff \boxed{MI^2 = 25} \iff \boxed{MI = 5}$

b) $\mathcal{C}$ est le cercle de centre I de rayon 5

3 2) $\mathcal{D} = \{ M / \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$

$M(x;y) \in \mathcal{D} \iff -4(x+1) + (y-2) \times 1 = 3$

$\iff -4x - 4 + y - 2 = 3$

$\iff -4x + y - 9 = 0$ vecteur normal $\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$

c'est l'équation de la droite perpendiculaire à (BC) passant par $D(0;9)$