Devoir n^{o}6 - Dérivation - 1S

17 janvier 2014 - 2h

Exercice 1 (8 pts) : On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

1. Montrer que f est dérivable en tout point où elle est définie, et que pour tout réel $x \neq 0$:
$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x^2}$$
.
2. Donner le tableau des variations de f, et préciser les extrémums locaux éventuels.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et interpréter graphiquement.
4. Déterminer le(s) point(s) de $\mathscr{C}_f$, pour lesquels $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -6x$; donner alors les équations des tangentes éventuelles.
5. Tracer $\mathscr{C}_f$, en complétant avec tous les éléments de l'exercice.

Exercice 2 (3,5 pts) : Soit $f(x) = -3x\sqrt{x}$

1. Préciser le domaine de définition de la fonction f, ainsi que son domaine de dérivabilité.
2. Calculer la dérivée de f, puis dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que f est dérivable en 0 à l'aide du taux d'accroissement.

Exercice 3 (3,5 points) : Montrer que $x^3 \geq 3x - 2$ sur $[-2; +\infty[$.

Exercice 4 (5 pts) : Un fabricant de produits alimentaires veut utiliser des boîtes de conserve pour conditionner ses produits. On suppose qu'une boîte de conserve est un cylindre parfait de contenance 1L.
Le fabricant cherche donc à déterminer les dimensions de la boîte de conserve afin que :

— le volume contenu soit de 1L,

— la quantité de métal (supposée proportionnelle à l'aire totale du cylindre) utilisée pour la fabriquer, soit minimale.

1. Soit r le rayon de la base du cylindre et soit h sa hauteur. Exprimer h en fonction de r.
2. Etablir que l'aire totale du cylindre est donnée par $\mathscr{A}(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2}{r}$.
3. Etudier la dérivabilité puis calculer la dérivée de la fonction $\mathscr{A}$ sur $]0; +\infty[$.
4. En déduire les variations de la fonction $\mathscr{A}$ sur $]0; +\infty[$.
   Pour quelle valeur de r cette aire est-elle minimale ? Montrer alors que $h = 2r$.
5. Quelles doivent être au millimètre près, les dimensions de la boîte de conserve (rayon de la base et hauteur), pour répondre aux contraintes fixées par le fabricant ?