

Correction du devoir n° 2 - Dérivation - 1^{spé}

Ex 1: $f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 7}{x-1}$ sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

111

1) $f = \frac{u}{v}$ $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$u(x) = -x^2 + 4x - 7$ $u'(x) = -2x + 4$
 $v(x) = x - 1$ $v'(x) = 1$

15

donc $f'(x) = \frac{(-2x+4)(x-1) - (-x^2+4x-7)(x-1)}{(x-1)^2}$
 $= \frac{-2x^2 + 2x + 4x - 4 + x^2 - 4x + 7}{(x-1)^2}$
 $= \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2}$

2) $(x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est de signe de $N(x) = -x^2 + 2x + 3$

0,5

$\Delta = 16$ $\sqrt{\Delta} = 4$

$x_1 = \frac{-2-4}{-2} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+4}{-2} = -1$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

2

3) Sur $]-\infty; 1[$, 6 est le minimum pour f atteint en $x = -1$ et sur $]1; +\infty[$, 2 est le maximum pour f atteint en $x = 3$

15

4) a) $y = f'(2) \times (x-2) + f(2)$ avec $f'(2) = 3$ et $f(2) = -3$

donc $y = 3(x-2) - 3 \Leftrightarrow y = 3x - 9$

1

b) il s'agit de résoudre $f'(x) = -1$

$\frac{-x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2} = -1 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2$
 $\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = -x^2 + 2x - 1$
 $\Leftrightarrow 3 = -1$ impossible

15

donc $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de tangente de coefficient directeur égal à -1

5) a) $\frac{-x+3}{x-1} = \frac{(-x+3)(x-1) - 4}{x-1} = \frac{-x^2 + x + 3x - 3 - 4}{x-1} = \frac{-x^2 + 4x - 7}{x-1} = f(x)$

C'est vérifié

1

b) $f(x) - (-x+3) = \frac{4}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
-4	$-$		$-$
$x-1$	$-$		$+$
$f(x) - (-x+3)$	$+$		$-$

Sur $]-\infty; 1[$, $f(x) > -x+3$
 donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ

Sur $]1; +\infty[$, $f(x) < -x+3$
 donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de Δ

1

$\Delta: y = -x+3$

Ex 2: 1) $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^3$

définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée

a) $f'(x) = 3 \times \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2 \times \frac{1}{2}$
 $= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2$

1

17

b) $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement croissante

1

2) $h(x) = \frac{3}{x^5}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ comme quotient

1) a) $h(x) = 3x^{-5}$ donc $h'(x) = 3 \times (-5) \times x^{-6} = -\frac{15}{x^6}$

1) b) $h'(x) < 0$ donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$			

3) $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient

a) $g = \frac{u}{v}$ $g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ donc $g'(x) = \frac{1 \times \sqrt{x} - (x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$

$\begin{cases} u(x) = x+1 & u'(x) = 1 \\ v(x) = \sqrt{x} & v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$ 1.5

$= \frac{\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} - (x+1)}{2\sqrt{x}}$

b) $2x > 0, \sqrt{x} > 0$
donc $g'(x)$ est du signe de $(x-1)$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$			

2

1.5

$= \frac{2x - x - 1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{x}$

$= \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

Ex 3: 1) $M \in [AB]$; $x = AM$ $0 \leq x \leq 4$

• aire du carré AMEF : $AM^2 = x^2$

• aire du triangle MBH isocèle en H : $IH \times IB$ (I milieu de [MB])

$IH = 4$ et $MB = 4 - x$ donc $IB = \frac{1}{2}(4 - x)$ 1.5

donc $IH \times IB = 4 \times \frac{1}{2}(4 - x) = 2(4 - x) = 8 - 2x$

Ainsi $f(x) = x^2 - 2x + 8$ est l'aire de la partie colorée

2) $f'(x) = 2x - 2$

1.5

x	0	1	4
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	8		16

7

1.4

3) L'aire du carré ABCD est de 16 u.a

$\frac{40}{100} \times 16 = 6,4$ or le minimum de f est 7 atteint 1

donc effectivement, l'aire colorée occupe au moins 40% de l'aire du carré