Devoir nº2 - Dérivation - 1ère spé maths

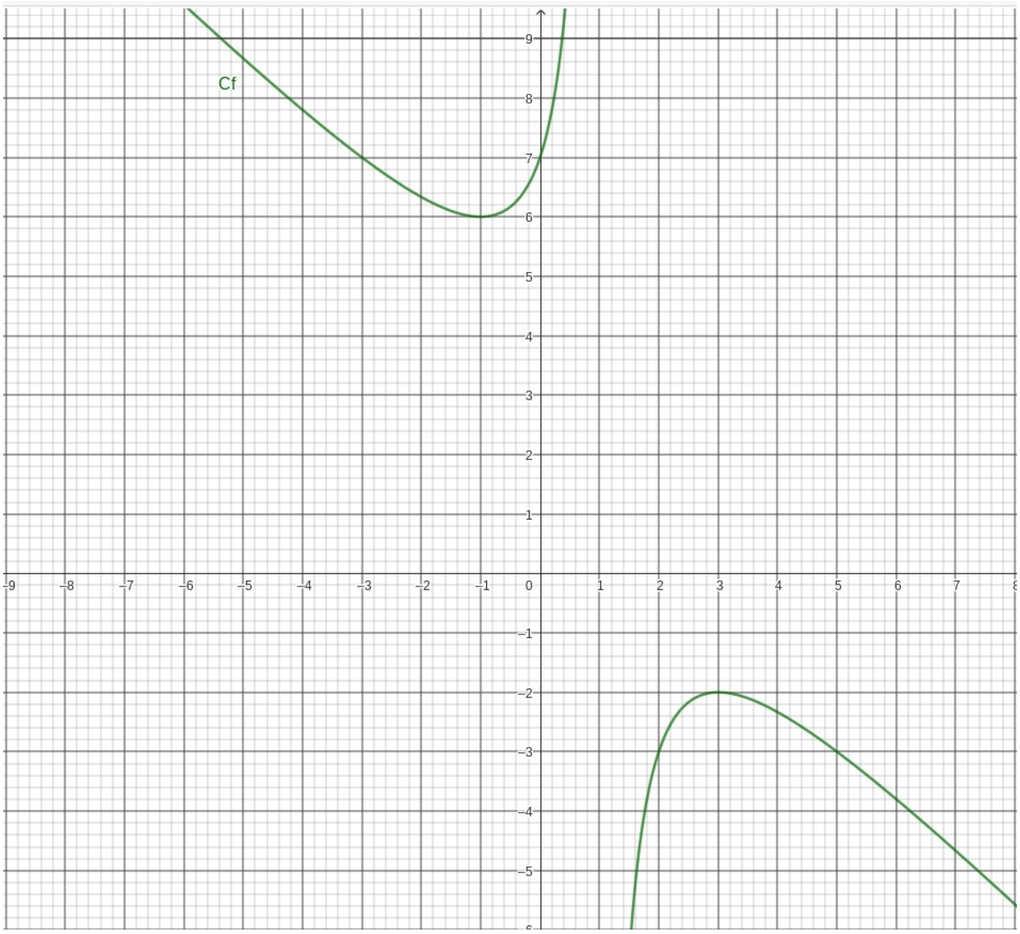
22 nov 2023 - 55 min

Exercice 1 (11 pts) : Soit la fonction f définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-x^2+4x-7}{x-1}$$

$\mathcal{C}_f$ est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x+3}{(x-1)^2}$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f. (on ne demande pas les limites)
3. La fonction f admet-elle un extremum sur $]-\infty;1[$? sur $]1;+\infty[$?
4. a) Déterminer l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2.
   b) Existe-t-il une tangente à C_f de coefficient directeur égal à -1 ?
5. a) Montrer que $f(x) = -x+3-\dfrac{4}{x-1}$.
   b) Soit Δ, la droite d'équation $y=-x+3$. Etudier la position relative de C_f et Δ.
6. Tracer T et Δ dans le graphique ci-dessous, et contrôler les résultats.



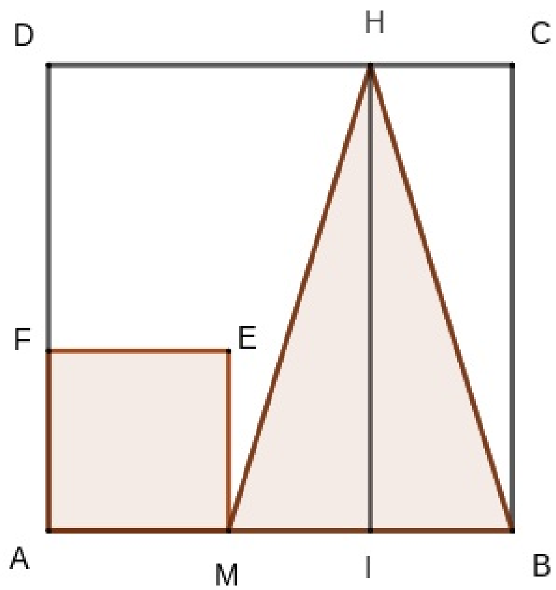
Exercice 2 (7 pts) :

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (\frac{1}{2}x - 1)^3$
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Déterminer le signe de $h'(x)$; en déduire le sens de variation de la fonction f.

2. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $h(x) = \dfrac{3}{x^5}$
   a) Calculer $h'(x)$.
   b) Déterminer le signe de $h'(x)$; en déduire le tableau de variation de la fonction h. (les limites ne sont pas demandées).

3. La fonction g est définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$
   a) Calculer $g'(x)$ sur $]0; +\infty[$.
   b) Déterminer le signe de $g'(x)$, et en déduire le tableau de variation de la fonction g (les limites ne sont pas demandées).

Exercice 3 (4 pts) :



Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré de côté 4, M est un point mobile du segment $[AB]$.
$AMEF$ est un carré, et H est un point de $[CD]$ tel que le triangle MBH est isocèle en H.

1. On pose $x = AM$, avec $0 \leq x \leq 4$.
   Démontrer que l'aire du domaine coloré est donnée par $f(x) = x^2 - 2x + 8$.
2. Etudier les variations de f sur $[0; 4]$.
3. Myriam est persuadée que l'aire du domaine coloré occupe toujours au moins 40 % de l'aire du carré $ABCD$. A-t-elle raison ? Justifier.