

20 dec 2023 - 55 min

Exercice 1 (5,5 pts) : Un test de dépistage d'une maladie est mis en vente. Le mode d'emploi précise :

- pour une personne n'étant pas malade, le test est néanmoins positif (c'est-à-dire désigne cette personne comme malade) dans 2,5% des cas;
- pour une personne malade, le test est néanmoins négatif (c'est-à-dire désigne cette personne comme non malade) dans 0,1% des cas.

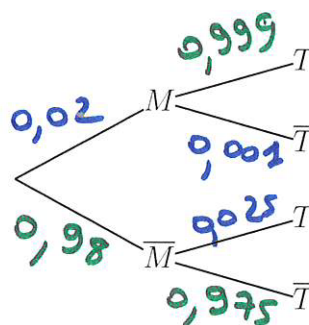
On suppose qu'une maladie touche 2% de la population d'un pays, et qu'on décide de faire passer le test à tous les habitants.

On considère, pour un habitant donné, les événements :

M : «Cet habitant est malade.»

T : «Le test est positif.»

1. Compléter l'arbre pondéré ci-contre, modélisant la situation.



2. Calculer la probabilité que l'habitant soit malade et que le test soit positif.
3. Calculer la probabilité que le test soit positif.
4. Sachant que le test est positif, calculer la probabilité que la personne soit malade.
Peut-on dire que ce test est efficace? *oui car 10^{-4}*

Exercice 2 (4,5 pts) : Dans un magasin de meubles, il y a 55% de canapés dont 14% sont en cuir, 30% de fauteuils dont 20% sont en cuir, et le reste est constitué de poufs dont 42% sont en cuir.

Un client se présente et choisit un meuble.

On considère les événements :

A : «Le meuble est un canapé.»

F : «Le meuble est un fauteuil.»

P : «Le meuble est un pouf.»

C : «Le meuble est en cuir.»

%	A	F	P	Total
C	7,7	6	5,3	20
C-bar	47,3	24	8,7	80
Total	55	30	15	100

1. Compléter le tableau ci-dessus.
2. Les événements F et C sont-ils indépendants?

Correction du deu 3. Prob + 2nd dep. -15

Ex 1: 1) aise

2) $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,02 \times 0,999 = \underline{0,01998}$

3) M et $\bar{M}$ forment une partition de l'univers des habitants ; d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \\ &= 0,01998 + 0,98 \times 0,025 \\ &= \underline{0,04448} \end{aligned}$$

$$4) P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,01998}{0,04448} \approx \underline{0,4492}$$

Quand le test est positif, on a environ seulement 45 % de chance que la personne soit malade : c'est faible, le test n'est pas efficace.

Ex 2: 1) tableau

$$2) P(F \cap C) = \frac{5}{100} = \underline{0,05}$$

$$P(F) = \frac{30}{100} = \underline{0,3} \text{ et } P(C) = \frac{20}{100} = \underline{0,2}$$

$$\text{donc } P(F) \times P(C) = 0,3 \times 0,2 = 0,06$$

$$P(F \cap C) = P(F) \times P(C)$$

donc les événements F et C sont indépendants

Ex 3: $f(x) = (m-1)x^2 + 2mx + 1 - 3m$ pour $\mathbb{R}$

1) f est du second degré $\Leftrightarrow m-1 \neq 0 \Leftrightarrow \underline{m \neq 1}$

2) @ $f(1) = (m-1) \times 1^2 + 2m + 1 - 3m$
 $= m-1 - m + 1 = 0$

donc 1 est racine de f pour tout $m \in \mathbb{R}$

b) $f(-2) = 0$

$\Leftrightarrow (m-1) \times (-2)^2 + 2m \times (-2) + 1 - 3m = 0$

$\Leftrightarrow 4(m-1) - 4m + 1 - 3m = 0$

$\Leftrightarrow 4m - 4 - 4m + 1 - 3m = 0$

$\Leftrightarrow -3 - 3m = 0$

$\Leftrightarrow m = -1$

-2 est racine de f pour $m = -1$

3) $\Delta_m = b^2 - 4ac = (2m)^2 - 4(m-1)(1-3m)$

$= 4m^2 - 4(m - 3m^2 - 1 + 3m)$

$= 4m^2 - 4(-3m^2 + 4m - 1)$

$= 4m^2 + 12m^2 - 16m + 4$

$= 16m^2 - 16m + 4$

$= 4(4m^2 - 4m + 1)$

$= 4(2m-1)^2$

1/5

m	-5	$\frac{1}{2}$	1	$\rightarrow$
Δ_m	+	0	+	+

pour $m = \frac{1}{2}$

$\Delta_m > 0$ pour $m \neq \frac{1}{2}$ et $m \neq 1$
 et $f(x) = 0$ admet 2 solutions

$\Delta_{\frac{1}{2}} = 0$ et $f(x) = 0$
 admet une seule solution

Pour $m = 1$, $f(x) = 2x - 2$ alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
 une seule solution

1

Ex 4: $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $g(x) = x+2$ sur $\mathbb{R}$

1) $h(x) = f(x) - g(x) = \frac{2x+4}{x-1} - (x+2) = \frac{2x+4 - (x+2)(x-1)}{x-1}$

$$= \frac{2x+4 - x^2 + x - 2x + 2}{x-1} = \frac{-x^2 + x + 6}{x-1}$$
sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) $N(x) = -x^2 + x + 6$

$\Delta = 1 + 4 \times 6 = 25$

$x_1 = \frac{-1-5}{-2} = 3$ $x_2 = \frac{-1+5}{-2} = -2$

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$	
$N(x)$	-	0	+	+	0	-
$x-1$	-	-	-	+	+	+
$h(x)$	+	0	-	+	0	-

$a = -1$
 $a < 0$

3) sur $] -\infty; -2[\cup] 1; 3]$, $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$
 $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $] -\infty; -2[\cup] 1; 3]$

et sur $] 2; 1[\cup] 3; +\infty[$, $h(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
 $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$