

Devoir n°4 - Probabilités - Dérivation - 1ère spé maths

24 janv 2024 - 55 min

Exercice 1 (6 pts) : Une usine fabrique des objets destinés à être commercialisés.

Sur 100 objets qui sortent de l'usine, en moyenne, 15 ont uniquement le défaut A, 7 ont uniquement le défaut B et 3 ont les deux défauts.

Le coût de production d'un objet est de 150 €. Grâce à la garantie, les clients peuvent faire réparer leur objet aux frais du fabricant. La réparation du défaut A revient à 30 € et la réparation du défaut B revient à 40 €.

Soit X la variable aléatoire qui associe à un objet choisi au hasard dans la production de l'usine, son coût de revient (coût de production + coût des réparations éventuelles).

On considère les événements :

A : «L'objet a le défaut A.»

B : «L'objet a le défaut B.»

	A	$\bar{A}$	Total
B	3	7	10
$\bar{B}$	15	75	90
Total	18	82	100

1. Compléter le tableau ci-dessus.
2. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.
4. On suppose que tous les objets produits sont vendus.
 - a) L'usine réalisera-t-elle des bénéfices si elle vend les objets 160 € pièce ?
 - b) Quel doit être le prix de vente d'un objet pour que l'usine réalise un bénéfice moyen de 50 € par objet ?

Exercice 2 (4 pts) : Un sac contient 7 billes indiscernables au toucher : 3 billes portent le numéro 0, 2 billes portent le numéro 1, une bille porte le numéro 2 et une bille porte le numéro 5.

Un joueur tire successivement au hasard et avec remise deux billes du sac, et note les numéros des deux billes tirées.

Parmi les deux jeux suivants, quel est le plus intéressant pour le joueur ?

Jeu 1 : on gagne la somme des numéros tirés.

Jeu 2 : on gagne le produit des numéros tirés.

On appelle X la variable aléatoire égale à la somme des deux dés, et Y la variable aléatoire égale au produit des deux dés.

1. On donne la loi de probabilité de X , compléter la loi de probabilité de Y .

valeurs de X	0	1	2	3	4	5	6	7	10	Total
probabilités	$\frac{9}{49}$	$\frac{12}{49}$	$\frac{10}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{6}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{49}$	1

valeurs de Y	0	1	2	4	5	10	25	Total
probabilités	$\frac{33}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{4}{49}$	$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{49}$	1

2. On donne $E(X) = \frac{126}{49} \simeq 2,6$; calculer $E(Y)$ et comparer.
3. On donne $\sigma(X) \simeq 2,36$; calculer $\sigma(Y)$, comparer et conclure.

Couverture du dev m4 - 1spe

Ex1: 1) Tableau

2)

valeurs de x	150	180	190	220	Total
probabilité	0,75	0,15	0,07	0,03	1

$$P(X=150) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{75}{100}$$

$$P(X=180) = P(A \cap \bar{B})$$

$$P(X=220) = P(A \cap B) = \frac{3}{100}$$

$$P(X=190) = P(\bar{A} \cap B)$$

3) $E(X) = 150 \times 0,75 + 180 \times 0,15 + 190 \times 0,07 + 220 \times 0,03$
 $= 159,40$

Sur un très grand nombre d'objets, le coût de revient en moyenne est de 159,40€.

4) @ 160 > 159,40 donc il y a un bénéfice de 960€ par objet soit 60€ pour 100 objets.

6) pour espérer réaliser un bénéfice moyen de 50€ il faut vendre un objet 209,40€.

Ex2 1) $P(Y=1) = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$; $P(Y=5) = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$

2) $E(X) = \frac{426}{49} \approx 8,7$ $E(Y) = \frac{0 + 4 + 8 + 4 + 20 + 20 + 25}{49} = \frac{81}{49} \approx 1,7$

$$E(X) > E(Y)$$

3) $\sigma(X) \approx 2,36$

$$V(Y) = \left(0 + \frac{4}{49} + \frac{16}{49} + \frac{16}{49} + \frac{100}{49} + \frac{200}{49} + \frac{625}{49} \right) - \left(\frac{81}{49} \right)^2$$

$$= \frac{961}{49} - \frac{81^2}{49^2} = \frac{40528}{2401}$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} \approx 4,12$$

Il vaut jouer au jeu 1 ; les gains moyens espérés sont plus élevés et l'écart type est bien plus faible

Ex 3: $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ sur $I = [1; 6]$ 13,5

1) $f(1)=0$; $f(2)=-2$; $f(4)=0$
 $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2: $f'(2)=0$

2) $f'(x) = a - \frac{8}{x^2}$

3) $f(1)=0 \Leftrightarrow a+b+8=0$
 $f'(2)=0 \Leftrightarrow a - \frac{8}{4} = 0 \Leftrightarrow a-2=0 \Leftrightarrow a=2$
 donc $a+b+8=0 \Leftrightarrow 2+b+8=0 \Leftrightarrow b=-10$
 $f(x) = 2x - 10 + \frac{8}{x}$ et $f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$

Ex 4: $f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 7}{x-1}$ sur $] -\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

1) @ $-x+3 - \frac{4}{x-1} = \frac{(-x+3)(x-1) - 4}{x-1} = \frac{-x^2 + 4x - 3 - 4}{(x-1)} = f(x)$

Δ: $y = -x+3$
 $f(x) - (-x+3) = \frac{-4}{x-1}$

x	-∞	1	+
-4	-	-	-
x-1	-	-	+
-4	-	+	-
x-1	-	+	-

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ sur $] -\infty; 1[$ et au-dessous de Δ sur $]1; +\infty[$

2) @ $f = \frac{u}{v}$ $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
 $f'(x) = \frac{(-2x+4)(x-1) - (-x^2+4x-7)}{(x-1)^2}$
 $= \frac{-2x^2 + 2x + 4x - 4 + x^2 - 4x + 7}{(x-1)^2}$
 $= \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2}$

⑥ $(x-1)^2$ donc $f'(x)$ est du signe de $N(x) = -x^2 + 2x + 3$
 $\Delta = 16$ $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$						

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$

2

3) D: y = -x Il s'agit de résoudre $f(x) = -1$ coefficients directs égaux

$f'(x) = -1$
 $\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2} = -1$
 $\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x + 1)$
 $\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = -x^2 + 2x - 1$
 $\Leftrightarrow 3 = -1$ impossible

donc $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de tangentes parallèles à D