

Correction du devoir n°5 - 15pt

Ex 1:

1) $u_n = \frac{3n-2}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$ $u_n = f(n)$ (5)
 avec $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$ sur $[0; +\infty[$
 $f'(x) = \frac{3(x+1) - (3x-2) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$
 $f'(x) > 0$ donc f strictement croissante
 alors (u_n) est croissante

2) $v_n = n^2 - 3n + 12 \quad (n \in \mathbb{N})$ 25
 $v_{n+1} = (n+1)^2 - 3(n+1) + 12 = n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 + 12$
 donc $v_{n+1} = n^2 - n + 10$
 $v_{n+1} - v_n = (n^2 - n + 10) - (n^2 - 3n + 12)$ 25
 $= 2n - 2 = 2(n-1)$
 $v_{n+1} - v_n > 0 \Leftrightarrow n > 1$ (v_n) est croissante
 $v_0 = 12 \quad v_1 = 10$ à partir de $n = 1$

Ex 2:

1) (u_n) suite arithmétique de premier terme u_1
 de raison r
 $\begin{cases} u_2 = 25 \\ u_{20} = 49 \end{cases}$ $u_{20} = u_{12} + 8r$ $u_2 = u_1 + 11r$
 $\Leftrightarrow 49 = 25 + 8r$ $\Leftrightarrow 25 = u_1 + 33$
 $\Leftrightarrow 24 = 8r$ $\Leftrightarrow u_1 = -8$
 $\Leftrightarrow r = 3$
 $u_n = u_1 + (n-1)r \Leftrightarrow u_n = -8 + (n-1) \times 3$
 $\Leftrightarrow u_n = 3n - 11 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
 $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{30} = \frac{(u_1 + u_{30}) \times 30}{2}$
 $u_{30} = 3 \times 30 - 11 = 90 - 11 = 79$
 donc $S = (-8 + 79) \times 15 = 1065$

(145)

31

$$2) S = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{32768}$$

termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

$$\text{donc } S = \frac{4 - \frac{1}{32768} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(4 - \frac{1}{32768} \times \frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow S = 8 - \frac{1}{32768} \approx 8$$

15

Ex 3 : 1) 75 abonnés le 1er janvier 2019

$$\frac{60}{100} \times 75 + 100 = 96 \times 75 + 100 = 145$$

abonnés au 1er février

$$2) a) \begin{cases} u_0 = 75 \\ u_1 = 145 \end{cases}$$

$$u_2 = 96 u_1 + 100 = 187$$

Chaque mois 60% des abonnés restent donc $\times 96$ et les nouvelles personnes arrivent

$$\text{donc } u_{n+1} = 96 u_n + 100 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$3) \begin{cases} u_1 - u_0 = 145 - 75 = 70 \\ u_2 - u_1 = 187 - 145 = 42 \neq \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{u_1}{u_0} = \frac{145}{75} \approx 1,9 \\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{187}{145} \approx 1,3 \neq \end{cases}$$

la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

$$4) v_n = u_n - 250 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned} a) v_{n+1} &= u_{n+1} - 250 \\ &= 96 u_n + 100 - 250 \\ &= 96 u_n - 150 \\ &= 96 (v_n + 250) - 150 \\ &= 96 v_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } v_0 &= u_0 - 250 \\ &= 75 - 250 \\ &= -175 \end{aligned}$$

(v_n) suite géométrique de raison $q = 96$ de 1er terme $v_0 = -175$

Devoir n°5 - Suites - 1Spe maths

1 mars 2024 - 1h

Exercice 1 (5 pts) : Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la suite définie par :

1. $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_n = n^2 - 3n + 12$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (4 pts) :

1. (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r telle que $u_{12} = 25$ et $u_{20} = 49$.
Exprimer u_n en fonction de n puis calculer $u_1 + u_2 + \dots + u_{30}$.
2. Calculer la somme $S = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{32768}$ en justifiant.

Exercice 3 (9,5 pts) : Un youtubeur compte 75 abonnés le 1er janvier 2019. Il remarque que chaque mois, il en conserve 60 % et 100 nouvelles personnes le suivent. On souhaite déterminer l'évolution de son nombre d'abonnés.

1. Montrer que le nombre d'abonnés au 1er février 2019 est 145.
2. On modélise la situation par une suite (u_n) , où u_n est le nombre d'abonnés n mois après janvier 2019.
 - a) Donner u_0 et u_1 , puis montrer que $u_2 = 187$.
 - b) Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,6u_n + 100$.
3. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?
4. On définit pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la suite (v_n) , par $v_n = u_n - 250$.
 - a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le 1er terme.
 - b) En déduire v_n , puis u_n en fonction de n .
5. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
6. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ? Interpréter dans le contexte de l'exercice.

7. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule et affiche dans combien de mois le nombre d'abonnés sera supérieur à 230.

1	n=0
2	u=75
3	while u < 230 :
4	u = 0,6u + 100
5	n=n+1
6	return n

8. A l'aide de la calculatrice, déterminer dans combien de mois le nombre d'abonnés sera supérieur à 230.

Exercice 4 (1,5 pts) : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

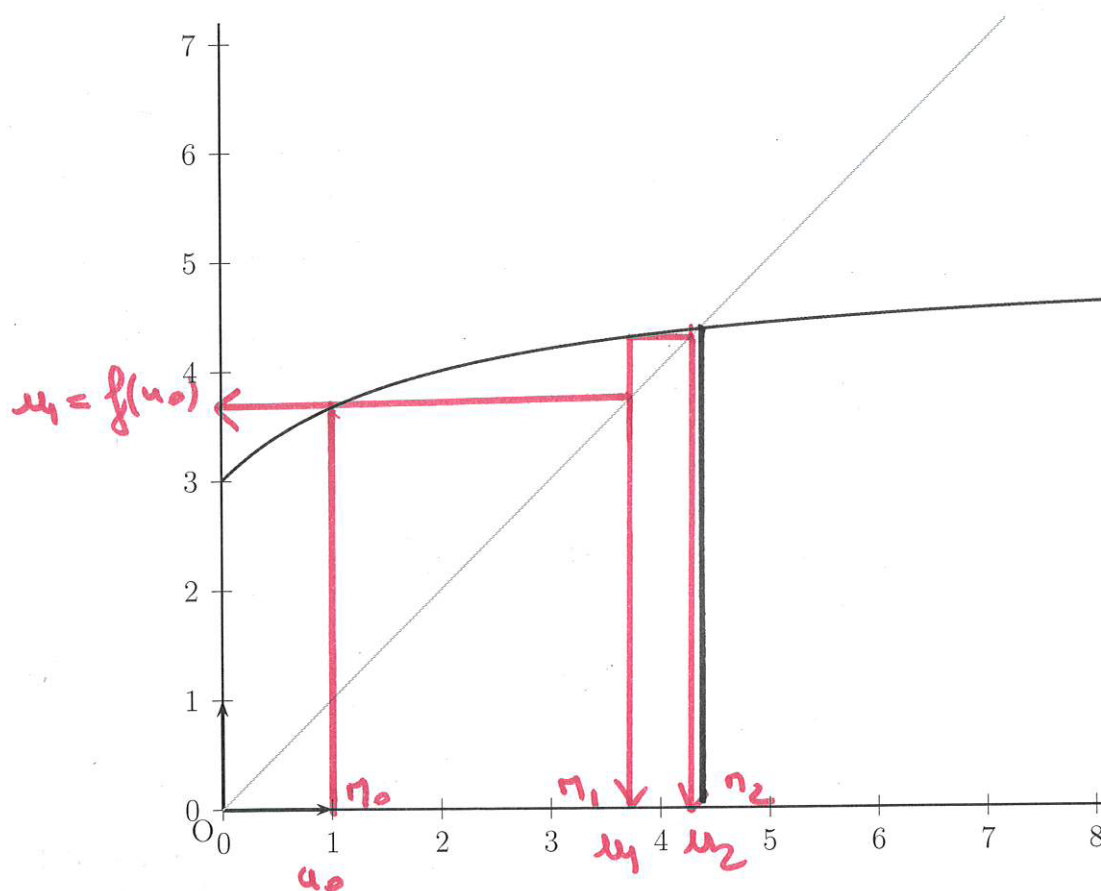
$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On a tracé dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

Sur la figure, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points M_0 , M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0 , u_1 et u_2 .



Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

La suite semble décroissante
et convergente vers 4,3 environ.