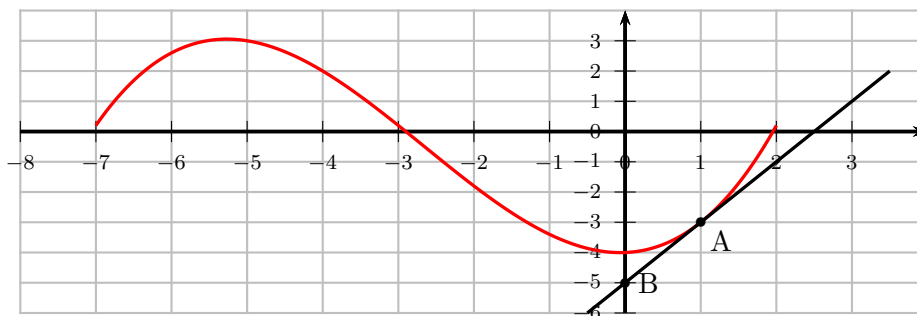


Devoir n°6 - Fonctions - Probabilités et Suites - 1Spe maths

20 mars 2024 - 2h

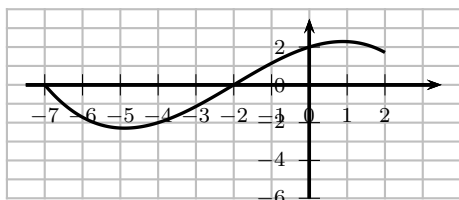
Exercice 1 (3 pts) : Pour chaque question, quatre réponses sont proposées, parmi lesquelles une seule est correcte. Indiquer sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie **bien justifiée**.

Partie A : La courbe ci-dessous représente une fonction g définie et dérivable sur $[-7 ; 2]$. La tangente au point $A(1 ; -3)$ coupe l'axe des ordonnées au point $B(0 ; -5)$.

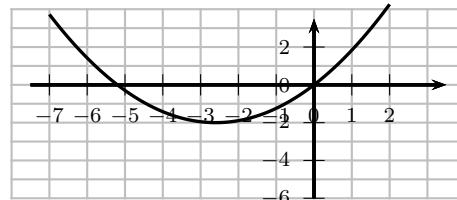


1. L'une des quatre courbes suivantes représente la fonction g' dérivée de la fonction g . Laquelle ?

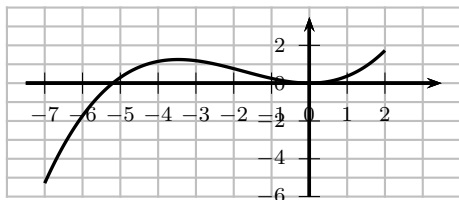
a.



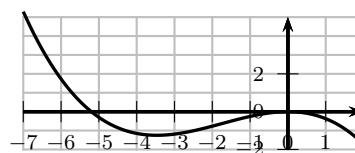
b.



c.



d.



2. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point A est :

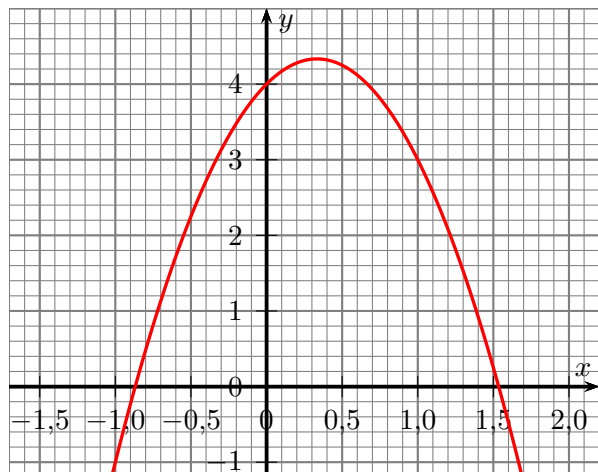
a. $y = -3x + 1$

b. $y = x - 5$

c. $y = 2x - 5$

d. $y = x - 4$

Partie B : Soit la courbe ci-dessous représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 2x + 4$. Dans l'algorithme ci-dessous, a et b sont deux réels. Quelle est la valeur de a en sortie de l'algorithme ?



a. 1,54

b. 1,48

c. -0,86

d. -0,87

```

a ← 0
b ← 4
Tant que b > 0
    a ← a + 0,01
    b ← -3a² + 2a + 4
Fin Tant que
    
```

Exercice 2 (4 pts) : La fonction f est définie sur $[0 ; 3]$ par

$$f(x) = 2xe^{-0,5x^2}.$$

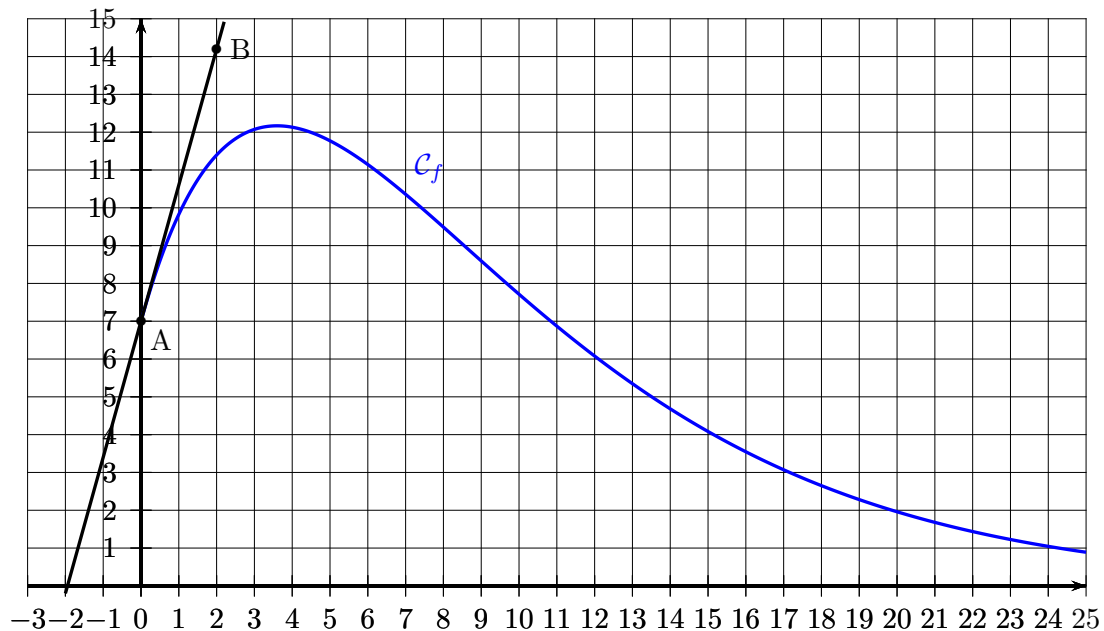
1. Montrer que $f'(x) = (2 - 2x^2)e^{-0,5x^2}$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $[0; 3]$ et dresser son tableau de variation.
3. En Europe, les observateurs d'une maladie nécessitant une hospitalisation considèrent qu'ils peuvent modéliser par la fonction f l'évolution du nombre de lits occupés par des malades pendant les trois mois d'hiver. Pour tout $x \in [0 ; 3]$, $f(x)$ représente le nombre de lits occupés, exprimé en million, à l'instant x , exprimé en mois. Un journal affirme que cet hiver, le nombre de lits occupés lors du pic de la maladie a dépassé le million. Que dire de cette affirmation ?

Exercice 3 (4 pts) : On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax + b)e^{-0,2x}$$

où a et b sont deux nombres réels.

On a représenté également sa tangente T au point $A(0 ; 7)$. T passe par le point $B(2 ; 14, 2)$.



1. a) Déterminer graphiquement $f(0)$.
b) Déterminer graphiquement $f'(0)$.
2. Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ en fonction de a et b .
3. Montrer que a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} a - 0,2b &= 3,6 \\ b &= 7 \end{cases}$$

En déduire la valeur de a .

Exercice 4 (3,5 pts) : Le syndrome d'apnée du sommeil se manifeste par des interruptions répétées de la respiration pendant le sommeil. Ce syndrome peut être dû à plusieurs facteurs.

Sauf indication contraire, les résultats numériques seront approchés à 10^{-4} près.

On cherche à étudier le lien entre le surpoids et le syndrome d'apnée du sommeil dans une population donnée.

Parmi les personnes participant à l'étude, 41 % sont en surpoids.

On observe que parmi les individus en surpoids, 12 % souffrent du syndrome d'apnée du sommeil, et que parmi les individus qui ne sont pas en surpoids, 4 % souffrent du syndrome d'apnée du sommeil.

On choisit au hasard une personne ayant participé à l'étude, et on note :

- S l'évènement : « la personne est en surpoids » ;
- A l'évènement : « la personne souffre d'apnée du sommeil ».

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit en surpoids et souffre d'apnée du sommeil.
3. Déterminer $P(A)$, et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On choisit au hasard une personne qui souffre du syndrome d'apnée du sommeil.
Quelle est la probabilité que cette personne soit en surpoids ?

Exercice 5 (5,5 pts) : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= 3 \\ u_{n+1} &= \frac{2}{1+u_n} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. On admet que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par

$$v_n = 1 - \frac{3}{u_n + 2}$$

- a) Calculer v_0 , v_1 et v_2 , puis conjecturer la nature de la suite (v_n) . Démontrer cette conjecture.
- b) En déduire une expression de v_n en fonction de n .
- c) Justifier que

$$u_n = \frac{3}{1-v_n} - 2$$

En déduire une expression de u_n en fonction de n .

- d) Déterminer la limite de la suite (u_n) .