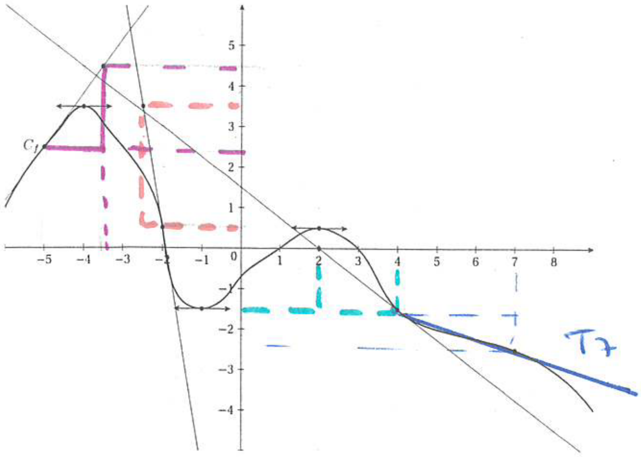
Devoir n°2 - Dérivation et Second degré - 1Spé maths

15 novembre 2024 - 1h

Exercice 1 (5,5 pts) : Voici la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



D'après le graphique

1. Donner la valeur de $f'(-4)$ en justifiant ; puis $f'(-5)$, $f'(-2)$ et $f'(4)$ (sans justifier).
2. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.
3. On sait que $f'(7) = -\dfrac{1}{3}$; tracer T_7, la tangente à C_f au point d'abscisse 7.
4. Résoudre graphiquement $f(x) > 0$ et $f'(x) > 0$.

Exercice 2 (5,5 points) : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa fonction dérivée.

$f_1(x) = \dfrac{3}{8}x^4 - \dfrac{5}{3}x^3 + 2x - \dfrac{11}{2}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f_2(x) = \dfrac{3}{x^5} - \dfrac{1}{x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f_3(x) = \sqrt{x}(2x+1)$ définie sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$

$f_4(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 1}{3 - x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

Exercice 3 (6 pts) :

1. La fonction f est définie sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x-2}{4x+8}$
   a) Justifier que f est dérivable sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$, et calculer $f'(x)$.
   b) Déterminer le signe de $f'(x)$; en déduire le sens de variation de la fonction f.
2. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 4,5x^2 + 6x$
   a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $g'(x)$.
   b) Déterminer le signe de $g'(x)$; en déduire le sens de variation de la fonction g.

Exercice 4 (3 pts) : Soit $m \in \mathbb{R}$; on considère l'équation

$$(E) : (m+8)x^2 + mx + 1 = 0$$

Pour quelles valeurs de m, cette équation admet-elle une unique solution dans $\mathbb{R}$?

Exercice 5 (Bonus) : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

A l'aide du taux d'accroissement, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et que $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Ex3 : 1) $f(x) = \dfrac{3x-2}{4x+8}$ 17

a) f est définie et dérivable sur $]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$ comme quotient car $4x+8 \neq 0$ 0,5

$u(x) = 3x-2$ $u'(x) = 3$ $f = \dfrac{u}{v}$ $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$v(x) = 4x+8$ $v'(x) = 4$

$$f'(x) = \frac{3(4x+8) - 4(3x-2)}{(4x+8)^2} = \frac{32}{(4x+8)^2}$$ 1,5

b) $\left.\begin{array}{l} 32 > 0 \\ (4x+8)^2 > 0 \end{array}\right\}$ donc $f'(x) > 0$ et f strictement croissante sur $]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$ 0,5 0,75

2) $g(x) = x^3 - 4,5x^2 + 6x$

a) g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme 0,5

$g'(x) = 3x^2 - 9x + 6 = 3(x^2 - 3x + 2)$ 0,75

b) 1 est racine évidente de $g'(x)$

donc $g'(x) = 3(x-1)(x-2)$ 1,5

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	0	+	

du signe de a à l'extérieur des racines $(a = 3)$

donc g est strictement croissante sur $]-\infty ; 1] \cup [2 ; +\infty[$

g est strictement décroissante sur $]1 ; 2[$ 1,5

Ex1 : 1) $f'(-4)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -4. On lit $f'(-4) = 0$ (tangente parallèle à l'axe des abscisses) 1

de même $f'(-5) = \dfrac{2}{1,5} = \dfrac{4}{3}$; $f'(-2) = -\dfrac{3}{0,5} = -6$; $f'(4) = \dfrac{-1,5}{2} = \dfrac{-3}{4}$

0,5×4

2) T : $y = f'(-2) \times (x - (-2)) + f(-2)$ avec $f'(-2) = -6$ et $f(-2) = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow y = -6(x+2) + 1/2$ 16,5

$\Leftrightarrow y = -6x - 11,5$

1

3) graphique

0,5

4) $f(x) > 0$ quand $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de l'axe des abscisses. On lit environ

$S =]-\infty ; -1,8[\cup]1 ; 3[$ / $f'(x) > 0$ sur $]-\infty ; -4[\cup]-1 ; 2[$ 1

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	3,5	$\searrow$	$-1,5$	$\nearrow$	0,5	$\searrow$	

donc

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

Ex 2 : • $f_1(x) = \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x - \frac{11}{2}$ sur $\mathbb{R}$

N $f_1'(x) = \frac{3}{8} \times 4x^3 - \frac{5}{3} \times 3x^2 + 2 = \frac{3}{2}x^3 - 5x^2 + 2$

16

• $f_2(x) = \frac{3}{x^5} - \frac{1}{x} = 3x^{-5} - 1/x$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f_2'(x) = 3 \times (-5)x^{-6} - \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{-15}{x^6} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 - 15}{x^6}$

1,5

• $f_3(x) = \sqrt{x}(2x+1)$ définie sur $[0;+\infty[$, dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit

$u(x) = \sqrt{x}$ $\quad u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$v(x) = 2x+1$ $\quad v'(x) = 2$ $\quad f_3 = uv \quad f_3' = u'v + uv'$

$f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (2x+1) + 2\sqrt{x} = \frac{2x+1+2\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

donc $f_3'(x) = \frac{6x+1}{2\sqrt{x}}$

1,5

• $f_4(x) = \frac{2x^2 - 5x + 1}{3 - x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

$f_4 = \frac{u}{v} \quad f_4' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \begin{cases} u(x) = 2x^2 - 5x + 1 \\ v(x) = 3 - x \end{cases} \begin{cases} u'(x) = 4x - 5 \\ v'(x) = -1 \end{cases}$

$f_4'(x) = \frac{(4x-5)(3-x) - (2x^2 - 5x + 1) \times (-1)}{(3-x)^2}$

$= \frac{12x - 4x^2 - 15 + \cancel{5x} + 2x^2 - \cancel{5x} + 1}{(3-x)^2}$

2

$= \frac{-2x^2 + 12x - 14}{(3-x)^2} = \frac{-2(x^2 - 6x + 7)}{(3-x)^2}$

Ex 4 : $(E) : (m+8)x^2 + mx + 1 = 0$

pour $m = -8$ $\quad (E) \iff -8x + 1 = 0 \iff x = 1/8$

pour $m \neq -8$ $\quad (E)$ est du second degré

$\Delta_m = b^2 - 4ac = m^2 - 4(m+8) = m^2 - 4m - 32$

(E) admet une seule solution $\iff \Delta_m = 0$

Δ_m est du second degré

$\Delta = 144$

$\sqrt{\Delta} = 12$

$\begin{cases} m_1 = \frac{4 - 12}{2} = -4 \\ m_2 = \frac{4 + 12}{2} = 8 \end{cases}$

Conclusion : (E) admet une seule solution pour $m = -8$, $m = -4$ et pour $m = 8$

Ex 5 (Bonus) : $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\tau_h = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ $\quad h \neq 0$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} = \frac{-h}{a(a+h)}$

Donc $\tau_h = \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-1}{a(a+h)}$

$\lim_{h \to 0} \tau_h = \frac{-1}{a^2}$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

et $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$