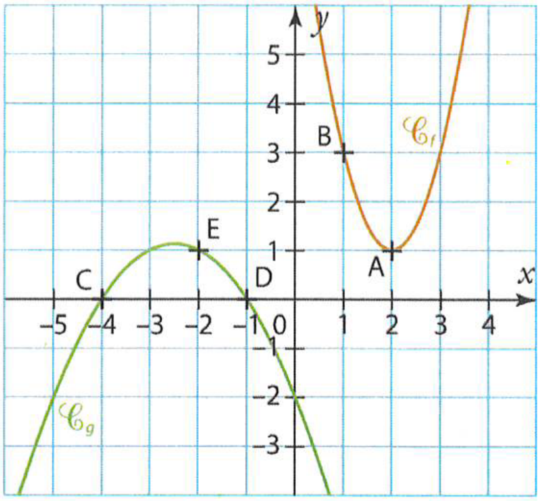
Devoir n°1 - Second degré - 1ère spé maths

16 oct 2024 - 1h15 min

Exercice 1 (5 pts) :



Soient f et g deux fonctions polynômes de degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c$, dont les courbes sont données ci-contre.

1. Préciser graphiquement le signe de a et du discriminant Δ pur chacune des fonctions.

2. Déterminer l'expression développée réduite de chacune des fonctions.

Exercice 2 (5 pts) : Un athlète lance un javelot à l'instant $t = 0$.
La hauteur $h(t)$ en mètre, à l'instant t, en seconde, du centre de gravité est donnée par :

$$h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 8t + 2$$

La hauteur est mesurée à partir du sol.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction h.
2. A quel instant le javelot est-il le plus haut ? A quelle hauteur est-il ?
3. Le javelot atteindra-t-il une hauteur de 32 m ? A quel(s) instant(s) ?
4. A quel instant(en s) le javelot touchera-t-il le sol ?

Exercice 3 (6 pts) : Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{2x-1} = 2$
2. $\dfrac{2x^2 - 12x - 17}{4 - x} \leq 1$
3. $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$

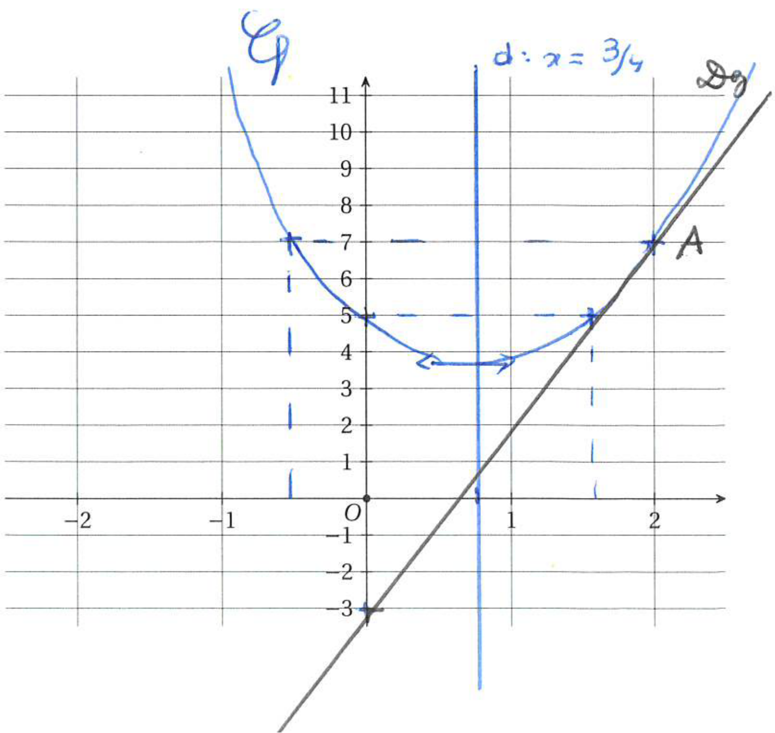
Exercice 4 (4 pts) :

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{et} \quad g(x) = 5x - 3$$

On pose $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Représenter $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.
2. Résoudre l'équation $h(x) = 0$ et en déduire les coordonnées du ou des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}_g$.
3. Etudier le signe de $h(x)$ et en déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}_g$.



Correction du devoir n°1. Sd degré – 1spé

Ex1 : 1) $\mathcal{C}_f$ est "tourné vers le haut" et ne coupe pas l'axe des abscisses donc $a>0$ et $\Delta<0$

$\mathcal{C}_g$ est "tourné vers le bas" et coupe l'axe des abscisses en 2 points donc $a<0$ et $\Delta>0$

2) On lit $A(2;1)$ le sommet de $\mathcal{C}_f$

donc $\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=1\end{cases}$ et $f(x)=a(x-2)^2+1$

or $B(1;3)\in\mathcal{C}_f$ donc $f(1)=3 \iff a\times 1+1=3 \iff a=2$

alors $f(x)=2(x-2)^2+1 = 2(x^2-4x+4)+1$

soit $f(x)=2x^2-8x+9$

$\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en $C(-4;0)$ et $D(-1;0)$

donc (-4) et (-1) sont les racines de g

alors $g(x)=a(x+4)(x+1)$

or $E(-2;1)\in\mathcal{C}_g$ donc $g(-2)=1 \iff a\times 2\times(-1)=1$

$\iff a=\frac{-1}{2}$

alors $g(x)=\frac{-1}{2}(x+4)(x+1) = -\frac{1}{2}(x^2+5x+4)$

soit $g(x)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x-2$

Ex2 : $h(t)=-\frac{1}{2}t^2+8t+2$ sur $[0;+\infty[$

hauteur en m pour t secondes

1) $\begin{cases}a=\frac{-1}{2}\\ a<0\end{cases}$ et $\begin{cases}\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-8}{-1}=8\\ h(8)=34\end{cases}$ donc

t	0		8		$+\infty$
$h(t)$	2	$\nearrow$	34	$\searrow$	$-\infty$

2) le maximum pour h est 34 atteint en $t=8$

Donc le javelot est au plus haut au bout de 8 s

il sera à une hauteur de 34 m

3) $h(t) = 32 \iff -\frac{1}{2}t^2 + 8t - 30 = 0$

$\iff -t^2 + 16t - 60 = 0$ $\quad \Delta = 16$, $\sqrt{\Delta} = 4$

$t_1 = \frac{-16-4}{-2} = 10$ et $t_2 = \frac{-16+4}{-2} = 6$

Le javelot atteindra une hauteur de 32 m au bout de 6 s et au bout de 10 s.

4) $h(t) = 0 \iff -\frac{1}{2}t^2 + 8t + 2 = 0 \iff -t^2 + 16t + 4 = 0$

$\Delta = 272$ $\quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{16 \times 17} = 4\sqrt{17}$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{-16 - 4\sqrt{17}}{-2} = 8 + 2\sqrt{17} \simeq 16,2 \\ t_2 = \frac{-16 + 4\sqrt{17}}{-2} = 8 - 2\sqrt{17} \ (<0) \end{cases}$$

Le javelot touchera le sol au bout de 17 s.

Ex 4 : $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ et $g(x) = 5x - 3$ sur $\mathbb{R}$

1) pour $\mathcal{C}_f$: $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4}$ $\quad f(3/4) = \frac{31}{8} = 3,875$

$S(3/4 ; 3,875)$ le sommet et $d : x = 3/4$ l'axe de symétrie

2) $h(x) = f(x) - g(x) = (2x^2 - 3x + 5) - (5x - 3)$

$= 2x^2 - 8x + 8$

$h(x) = 0 \iff 2x^2 - 8x + 8 = 0 \iff x^2 - 4x + 4 = 0$

$\iff (x-2)^2 = 0 \iff x = 2$

$f(2) = g(2) = 7$

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}_g$ se coupent en $A(2 ; 7)$

3) $h(x) \geqslant 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de $\mathcal{D}_g$.

Ex 5 : Bonus $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$ sur $\mathbb{R}$

1) $f(-1) = 3 - 5 + 2 = 0$ $\quad -1$ est racine évidente

2) alors $f(x) = (x+1)(3x+2)$

et $-2/3$ est l'autre racine

Ex3 : 1) $\dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{2x-1} = 2$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0 ; 1/2\}$

$\iff \dfrac{3(2x-1) - x}{x(2x-1)} = 2$

$\iff 6x - 3 - x = 2x(2x-1)$

$\iff 5x - 3 = 4x^2 - 2x$

$\iff 4x^2 - 7x + 3 = 0$

$\Delta = 49 - 48 = 1$

$\sqrt{\Delta} = 1$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{7-1}{8} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4} \\ x_2 = \dfrac{7+1}{8} = 1 \end{cases}$

$S = \{3/4 ; 1\}$

2) $\dfrac{2x^2 - 12x - 17}{4-x} \leq 1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$

$\iff \dfrac{2x^2 - 12x - 17}{4-x} - 1 \leq 0$

$\iff \dfrac{2x^2 - 12x - 17 - (4-x)}{4-x} \leq 0$

$\iff \dfrac{2x^2 - 11x - 21}{4-x} \leq 0$

Soit $N(x) = 2x^2 - 11x - 21$

$\Delta = 121 + 168 = 289$

$\sqrt{\Delta} = 17$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{11-17}{4} = \dfrac{-6}{4} = \dfrac{-3}{2} \\ x_2 = \dfrac{11+17}{4} = \dfrac{28}{4} = 7 \end{cases}$

x	$-\infty$		$-3/2$		4		7		$+\infty$
$N(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$4-x$		+		+	‖	−		−	
$\dfrac{N(x)}{4-x}$		+	0	−	‖	+	0	−	

a = 2 du signe de a à l'extérieur des racines

$S =]-\infty ; -3/2] \cup]4 ; 7]$

3) $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$ sur $\mathbb{R}$

On pose $X = x^2$ avec $X \in \mathbb{R}^+$

L'équation devient $2X^2 - 9X + 4 = 0$

$\Delta = 81 - 32 = 49$

$\sqrt{\Delta} = 7$

$\begin{cases} X_1 = \dfrac{9-7}{4} = \dfrac{2}{4} = 1/2 \\ X_2 = \dfrac{9+7}{4} = \dfrac{16}{4} = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2} \iff x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \iff x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2 = 4 \iff x = \pm 2 \end{cases}$

$S = \left\{-2 ; -\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{\sqrt{2}}{2} ; 2\right\}$