Correction du dev n°3 - 1spé maths

Ex 1 : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 6}{x+1}$ sur $\mathcal{D} =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

110

1) f est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme quotient car $x+1 \neq 0$. $f = \dfrac{u}{v}$ $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ 0,5

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+1) - (x^2-2x+6)\times 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - x^2 + 2x - 6}{(x+1)^2}$$

donc $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2}$ 1

2) $(x+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de 0,5

$N(x) = x^2 + 2x - 8$

$\Delta = 4 + 32 = 36$ $\sqrt{\Delta} = 6$

$x_1 = \dfrac{-2-6}{2} = -4$

$x_2 = \dfrac{-2+6}{2} = 2$

1,5

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-10	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

$a=1$ $a>0$

3) (-10) est un maximum sur $]-\infty;-1[$ atteint en $x=-4$ et 2 est un minimum sur $]-1;+\infty[$ en $x=2$ 1,5

4) $T : y = f'(-2)(x-(-2)) + f(-2)$ $\quad f'(-2) = -8$, $f(-2) = -14$

$\iff y = -8(x+2) - 14$

$\iff y = -8x - 16 - 14$

$\iff y = -8x - 30$ 1

5) $f'(x) = 1 \iff \dfrac{x^2+2x-8}{(x+1)^2} = 1 \iff x^2 + 2x - 8 = (x+1)^2$

$\iff x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + 1$

$\iff -8 = 1$

Impossible

$\mathcal{C}_f$ n'a pas de tangentes de coefficient directeur égal à 1 1,5

5) $\Delta : y = x - 3$

ⓐ $x - 3 + \dfrac{9}{x+1} = \dfrac{(x-3)(x+1)+9}{x+1} = \dfrac{x^2 - 2x - 3 + 9}{x+1}$

$= \dfrac{x^2 - 2x + 6}{x+1} = f(x)$ 0,5

ⓑ $f(x) - (x-3) = \dfrac{9}{x+1}$ du signe de $(x+1)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-(x-3)$		$-$	||	$+$	

1,5

sur $]-\infty;-1[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de Δ puis sur $]-1;+\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ.

+0,5

Ex2 : 1) $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse (-1), en B 0,75

on lit $f'(-1) = 0$ et $f'(0) = -1$ (en A)

0,25 0,5

2) La seule courbe qui réalise $f'(-1) = 0$ et $f'(0) = -1$ est la courbe ① ; c'est donc la représentation graphique de f' 1

$g' = f$ or

x	$-2,5$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

donc g est ~~strictement~~ décroissante sur $[-2,5;-2]$ puis croissante sur $[-2;+\infty[$; c'est donc la courbe ③ qui représente g. 1

13,5

Ex 3 : $f(t) = \frac{-1}{6}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 28t$ sur $[0;+\infty[$

(t jour, $f(t)$ en milliers)

1) $\begin{cases} f(5) \simeq 181,667 \\ f(20) \simeq 226,667 \end{cases}$ Au bout de 5 jours, on compte 181 667 malades et 226 667 au bout de 20 jours

1

2) $f'(t) = \frac{-1}{6} \times 3t^2 + \frac{5}{2} \times 2t + 28 = \frac{-1}{2}t^2 + 5t + 28$ 0,5

(f dérivable sur $[0;+\infty[$ comme polynôme de degré 3)

3) $f'(0) = 28$ vitesse d'évolution de la maladie au début de la maladie

1

4) $f'(3) = 38,5$ vitesse d'évolution à $t = 3$ jours

5) $f'(t) = \frac{-1}{2}t^2 + 5t + 28$

$\Delta = 25 - 4 \times \left(\frac{-1}{2}\right) \times 28 = 81$

$\sqrt{\Delta} = 9$

1,5

$\begin{cases} t_1 = \frac{-5-9}{-1} = 14 \\ t_2 = \frac{-5+9}{-1} = \cancel{-4} \text{ ne convient pas} \end{cases}$

t	0		14		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	$a = -\frac{1}{2}$, $a < 0$
$f(t)$	0	$\nearrow$	$f(14)$	$\searrow$	$-\infty$

$f(14) \simeq 424,667$

Le maximum pour f est atteint pour $x = 14$ donc le pic de l'épidémie est atteint au bout de 14 jours

0,5

6) $f'(14) = 0$ Au moment du pic, la vitesse d'évolution de la maladie est nulle.

0,5

/5

Ex4 : Pour $x > 0$, on veut montrer que

$$x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$$

$f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ sur $]0;+\infty[$

1) f est dérivable comme somme car $x \neq 0$

$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = \frac{2(x^3-1)}{x^2}$ 0,75

2) $P(x) = x^3 - 1$ sur $\mathbb{R}$ 0,25

a) $P(1) = 1 - 1 = 0$ donc 1 est racine de P

b) alors $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$ a? b? c?

$(x-1)(ax^2+bx+c)$
$= ax^3 + bx^2 + cx$
$\quad - ax^2 - bx - c$
$= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$
$= P(x)$

$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 0 \\ -c = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ 1 - 1 = 0 \text{ ok} \\ c = 1 \end{cases}$

Alors $P(x) = (x-1)(x^2+x+1)$ 1,5

3) $f'(x) = \frac{2P(x)}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$ 0,25

- soit $g(x) = x^2 + x + 1$ $\Delta = -3$ $\Delta < 0$
donc $g(x) > 0$ du signe de $a = 1$
- $2 > 0$ et $x^2 > 0$

alors $f'(x)$ est du signe de $(x-1)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	3	$\nearrow$	

1,5

15,5

4) sur $]0;+\infty[$, 3 est le minimum pour f
atteint en $x = 1$ 1

donc $f(x) \geq 3$ c'est à dire $x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$

Ex 5 (Bonus) : $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 12$ sur $\mathbb{R}$

1) $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 12x - 12$

2) f' est un polynôme de degré 3 donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f''(x) = 36x^2 - 24x + 12$
$= 12(3x^2 - 2x + 1)$

$P(x) = 3x^2 - 2x + 1$
$\Delta = 4 - 12 = -8$
$\Delta < 0$

donc $P(x) > 0$ du signe de $a = 3$ sur $\mathbb{R}$ et $f''(x)$ aussi

3)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

4) or $f'(1) = 0$

donc

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

5) et

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$