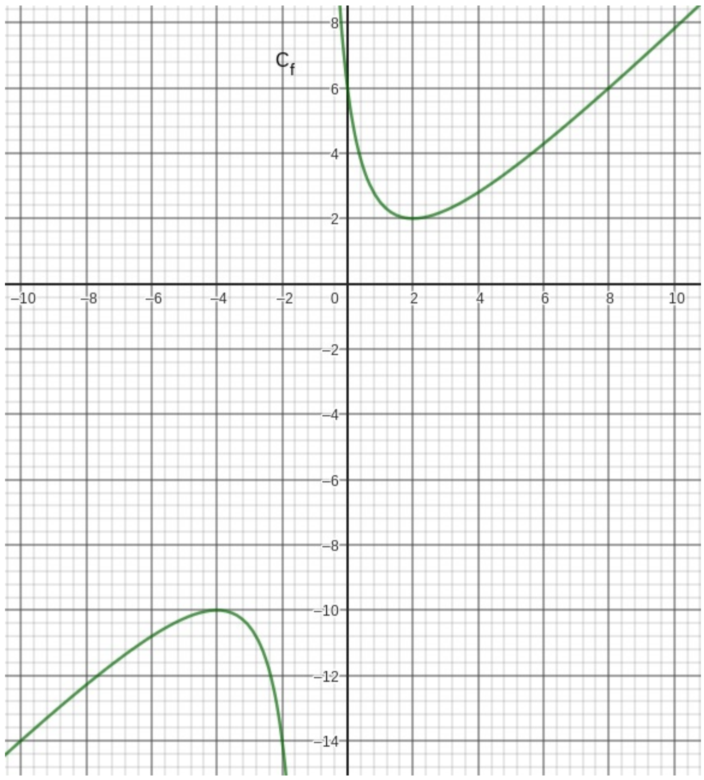
Devoir n°3 - Dérivation et Second degré - 1Spé maths

27 novembre 2024 - 2h

Exercice 1 (8 pts) : On considère la fonction f définie sur $\mathscr{D} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 6}{x + 1}$$

Ci-dessous, on a tracé $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f.



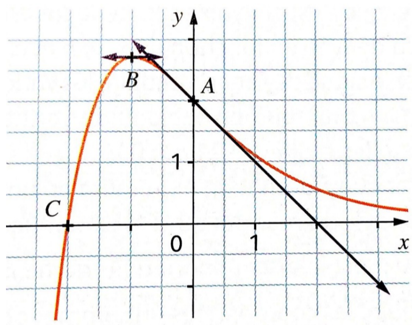
1. Justifier que f est dérivable sur $\mathscr{D}$, et montrer que

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2}$$

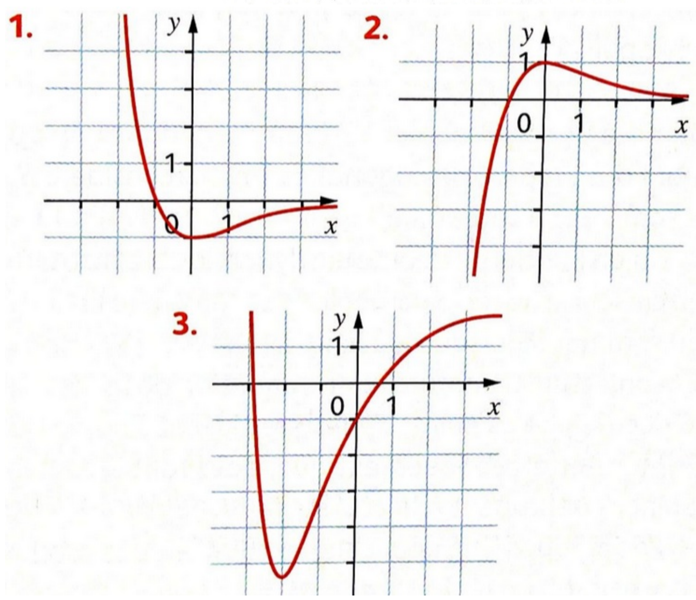
2. Etudier le signe de $f'(x)$, et en déduire le tableau de variations de f sur $\mathscr{D}$.
3. La fonction f admet-elle des extrema sur $\mathscr{D}$?
4. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.
5. Existe-t-il des tangentes à $\mathscr{C}_f$ de coefficient directeur égal à 1 ?
6. Soit Δ la droite d'équation $y = x - 3$.
   a) Montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}$, $f(x) = x - 3 + \dfrac{9}{x+1}$
   b) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.
7. Tracer T et Δ sur le graphique.

Exercice 2 (3,5 pts) :

Ci-contre, la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[-2,5; +\infty[$ ainsi que deux de ses tangentes.



1. Déterminer $f'(-1)$ et $f'(0)$.



2. Parmi les courbes ci-contre, l'une représente la fonction dérivée f', et une autre représente une fonction g définie et dérivable sur $[-2,5; +\infty[$ telle que $g' = f$.
   Retrouvez-les.

Exercice 3 (4 pts) : On a modélisé l'évolution d'une épidémie de grippe de la façon suivante : si t est le temps (en jour) écoulé depuis le début de l'épidémie, le nombre de cas en millier est donné par :

$$f(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 28t$$

1. Combien de malades compte-t-on au bout de 5 jours ? Au bout de 20 jours ?
2. Donner l'expression de la fonction dérivée de f.

   On appelle vitesse instatanée d'évolution au temps t le nombre dérivé de la fonction f en t.
3. Calculer la vitesse instantanée d'évolution de la maladie au début de l'épidémie.
4. Calculer la vitesse instantanée d'évolution de la maladie à l'instant $t = 3$ jours.
5. Déterminer le nombre de jours pour atteindre le pic de l'épidémie.
6. Quelle est la vitesse d'évolution de la maladie au moment du pic ?

Exercice 4 (4,5 pts) : Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a

$$x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$$

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2}$.
2. Soit $P(x) = x^3 - 1$ défini sur $\mathbb{R}$.
   a) Vérifier que 1 est racine évidente de P.
   b) Factoriser $P(x)$.
3. Etudier le signe de $f'(x)$, et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
4. Montrer l'inégalité demandée.

Exercice 5 (Bonus) : Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 12$$

1. Déterminer f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer f'' la fonction dérivée de f' sur $\mathbb{R}$, et étudier son signe.
3. En déduire le tableau de variations de f' sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
5. Dresser le tableau de variations de f.