Dev n°5 - Suites - Probabilités et Variables Aléatoires- 1ère spé maths

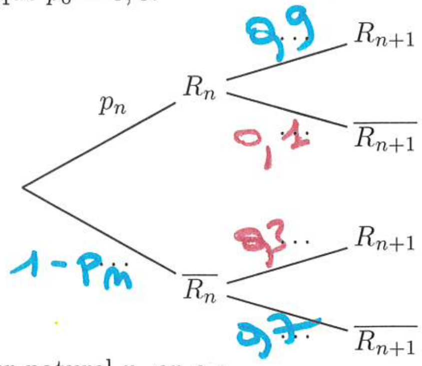
19 février 2025 - 1h30

Exercice 1 (7 pts) : Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente que

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90 % des cas le jour suivant ;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'évènement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la n-ième séance »,
- p_n la probabilité de l'évènement R_n. On considère que $p_0 = 0,6$.



1. Soit n un entier naturel, compléter l'arbre pondéré ci-contre.

2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel n, on a :

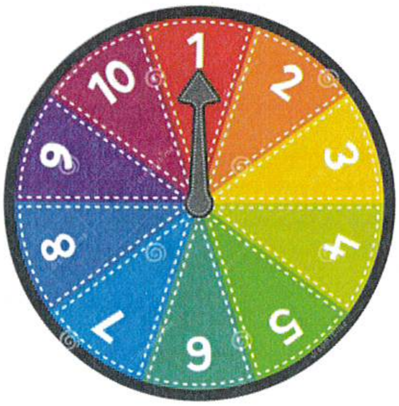
$$p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3.$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - 0,75$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Justifier que $p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c) Déterminer le sens de ~~variations~~ variation de la suite (p_n).
   d) Quelle semble être la limite de (p_n) ? Interpréter cette valeur dans le cadre de l'exercice.

Exercice 2 (7 pts) : La roue équilibrée est partagée en 10 secteurs identiques de 1 à 10.

Un joueur peut choisir l'une des stratégies suivantes :

- **Stratégie 1 :** il mise 10 € sur un numéro pair.
  Si un numéro pair sort, il reçoit le double de sa mise, sinon il perd sa mise.
- **Stratégie 2 :** il mise 10 € sur un numéro.
  Si ce numéro sort, il reçoit 10 fois sa mise, sinon il perd sa mise.
- **Stratégie 3 :** il mise 10 € sur les numéros 1 et 2.
  Si l'un de ces numéros sort, il reçoit le double de sa mise, sinon il perd sa mise.



1. Pour chacune des stratégies, donner la loi de probabilité de la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur, en complétant les tableaux ci-dessous (justifier brièvement les calculs).

Gains algébriques X_1	10	-10
Probabilité	1/2	1/2

Gains algébriques X_2	90	-10
Probabilité	1/10	9/10

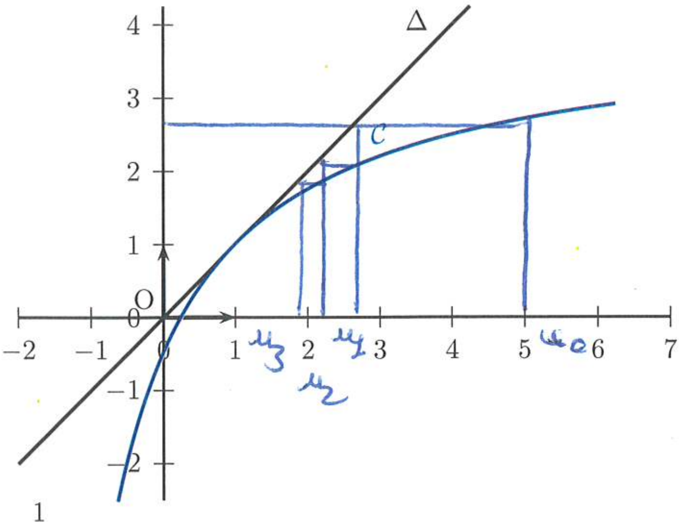
Gains algébriques X_3	10	-10
Probabilité	1/5	4/5

2. Déterminer l'espérance et l'écart type de chacune des variables aléatoires.
3. Comparer les différentes stratégies.

Exercice 3 (7 pts) : Soit f la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$, et soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} = f(u_n) \end{cases}$$

Ci-dessous, une partie de la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



1. a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

   b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

   b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire que $u_n = \dfrac{15+4n}{3+4n}$.

   c) Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?

3. a) Compléter la fonction « `seuil` » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit inférieur ou égal à 1,1.

```
def seuil() :
    u = 5
    n = 0
    while u > 1,1 :
        u = (4u-1)/(u+2)
        n = n+1
    return n
```

   b) Quelle est la valeur renvoyée par l'algorithme ?

Ex 1 : 1) arbre 0,5

2) $p_{n+1} = p(R_{n+1})$ $\qquad p_0 = 0,6$

R_n et $\bar{R}_n$ forment une partition du "franchissement de la haie" le nième jour.

D'après la formule des probabilités totales

$p_{n+1} = p(R_n \cap R_{n+1}) + p(\bar{R}_n \cap R_{n+1})$ $\qquad$ 18

$= p(R_n)\, p_{R_n}(R_{n+1}) + p(\bar{R}_n)\, p_{\bar{R}_n}(R_{n+1})$

$= p_n \times 0,9 + (1-p_n)\times 0,3$

$= 0,9\, p_n + 0,3 - 0,3\, p_n$

$= 0,6\, p_n + 0,3$ $\qquad (n \in \mathbb{N})$ $\qquad$ 2

3) $u_n = p_n - 0,75$ $\quad (n \in \mathbb{N})$

a) $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75$

$= (0,6\, p_n + 0,3) - 0,75$

$= 0,6\, p_n - 0,45$

$= 0,6\,(u_n + 0,75) - 0,45$

$= 0,6\, u_n + 0,45 - 0,45$

$= 0,6\, u_n$

1,5

$u_0 = p_0 - 0,75$

$= 0,6 - 0,75$

$= -0,15$

1 (u_n) est une suite géométrique de raison 0,6 de terme initial $u_0 = -0,15$

b) alors $u_n = -0,15 \times 0,6^n$ et $p_n = u_n + 0,75$

$(u_n = u_0 \times q^n)$ $\qquad = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$

0,5 $\qquad$ pour $n \in \mathbb{N}$

c) $p_{n+1} - p_n = (0,75 - 0,15 \times 0,6^{n+1}) - (0,75 - 0,15 \times 0,6^n)$

$= -0,15 \times 0,6^{n+1} + 0,15 \times 0,6^n$ $\qquad 0,15 > 0$

$= 0,15 \times 0,6^n \times (-0,6 + 1)$ $\qquad 0,6^n > 0$

$= 0,15 \times 0,6^n \times 0,4$ $\qquad 0,4 > 0$

1,5

$p_{n+1} - p_n > 0$ donc (p_n) est croissante

d) D'après la calculatrice $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0,75$

$(0 < 0,6 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,6^n = 0)$

1

Au fur et à mesure du temps qui passe, la probabilité que l'athlète franchisse la haie se rapproche de 0,75

Ex 2 : 1) a)

X_1	10	-10
P	1/2	1/2

$P(X_1 = 10) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
5 numéros pairs

X_2	90	-10
P	1/10	9/10

$10 \times 10 = 100$.
-10€ de mise
$\rightarrow 90$€

$P(X_2 = 90) = \frac{1}{10}$
un seul bon numéro

X_3	10	-10
P	1/5	4/5

$P(X_3 = 10) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
le 1 ou le 2 sort

/3

b) $E(X_1) = 10 \times \frac{1}{2} - 10 \times \frac{1}{2} = 0$
$E(X_2) = 90 \times \frac{1}{10} - 10 \times \frac{9}{10} = 0$
$E(X_3) = 10 \times \frac{1}{5} - 10 \times \frac{4}{5} = \frac{-30}{5} = -6$

/3

$V(X_1) = 10^2 \times \frac{1}{2} + 10^2 \times \frac{1}{2} - 0 = \frac{100}{2} + \frac{100}{2} = 100$
$\sigma(X_1) = \sqrt{100} = 10$

$V(X_2) = 90^2 \times \frac{1}{10} + 10^2 \times \frac{9}{10} - 0 = \frac{8100}{10} + \frac{900}{10} = 900$
$\sigma(X_2) = \sqrt{900} = 30$

$V(X_3) = 10^2 \times \frac{1}{5} + 10^2 \times \frac{4}{5} - 6^2 = \frac{100}{5} + \frac{400}{5} - 36 = 64$
$\sigma(X_3) = 8$

2) Les stratégies 1 et 2 sont équitables $E(X_1) = E(X_2) = 0$
La stratégie 3 est défavorable au joueur $E(X_3) < 0$

La stratégie 2 est très aléatoire, vu que $\sigma(X_2) = 30$
c'est Beaucoup !
La stratégie 3 est la plus stable avec $\sigma(X_3) = 8$

1,5

/7,5

Ex 3 : $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ sur $]-2;+\infty[$ 17,5

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n+2} = f(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1) ⓐ graphique 0,5

ⓑ il semble que (u_n) soit décroissante et convergente vers 1 0,5

2) $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ $(n \in \mathbb{N})$

ⓐ $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}-1}$ $u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 1}{u_n+2} - 1 = \frac{4u_n - 1 - (u_n+2)}{u_n+2}$

donc $u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - 3}{u_n+2}$

Alors $v_{n+1} = \frac{u_n+2}{3u_n - 3}$

donc $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+2}{3(u_n-1)} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{u_n+2-3}{3(u_n-1)}$

1,5 $= \frac{u_n-1}{3(u_n-1)} = \frac{1}{3}$

$v_0 = \frac{1}{u_0-1} = \frac{1}{4}$ (v_n) est une suite arithmétique de raison $1/3$ de 1er terme $v_0 = \frac{1}{4}$

1

ⓑ donc $v_n = v_0 + n \times r = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}n = \frac{3+4n}{12}$ 0,5

$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \iff \frac{1}{v_n} = u_n - 1 \iff u_n = \frac{1}{v_n} + 1$

Donc $u_n = \frac{12}{3+4n} + 1 = \frac{15+4n}{3+4n}$ 1

ⓒ d'après la calculatrice $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$ 0,5

3) ⓐ

```
def seuil():
    u = 5
    n = 0
    while u > 1,1 :
        u = (4u-1)/(u+2)
        n = n+1
    return n
```

1

ⓑ d'après la calculatrice

$\begin{cases} u_{29} > 1,1 \\ u_{30} < 1,1 \end{cases}$ 1

donc l'algorithme renvoie $n = 30$