Dev n°5 Bis - Suites - Probabilités et Variables Aléatoires- 1ère spé maths

8 mars 2025 - 2h

Exercice 1 (11,5 pts) : *Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.*

Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.

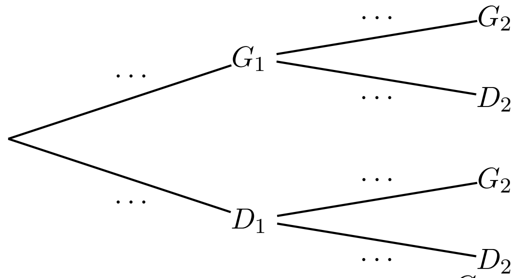
Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.
De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

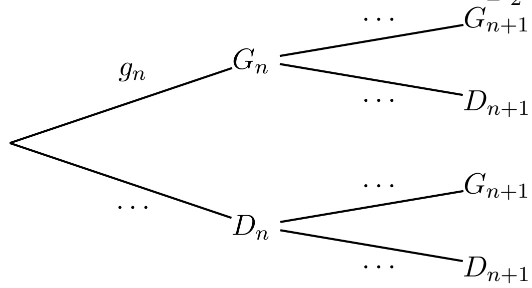
Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n.
On a donc $g_1 = 0{,}5$.

1. a) Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$?
   b) Compléter l'arbre des probabilités ci-contre qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée.
   c) Calculer g_2.



2. Soit n un entier naturel non nul.
   a) Compléter l'arbre des probabilités ci-contre qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.
   b) Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0{,}5g_n + 0{,}2.$$



3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0{,}4$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4$.
4. Étudier les variations de la suite (g_n).
5. Donner la limite de la suite (g_n), et interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.
6. a) Compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à 0,401.
   b) Quelle est la valeur renvoyée par l'algorithme ?

```
1  def seuil() :
2      g = 0.5
3      n = 1
4      while ............ :
5          g = .........
6          n = ......
7      return (n)
```

Exercice 2 (5,5 pts) : Un joueur mise 3 €, puis lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

- S'il obtient un nombre pair, le joueur reçoit, en euros, le double du nombre obtenu.
- S'il obtient 1 ou 3, le joueur reçoit 1 €.
- Sinon, le joureur ne reçoit rien.

X est la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur.

1. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur. (on pourra compléter le tableau ci-dessous en justifiant).

Gains algébriques X					
Probabilité					

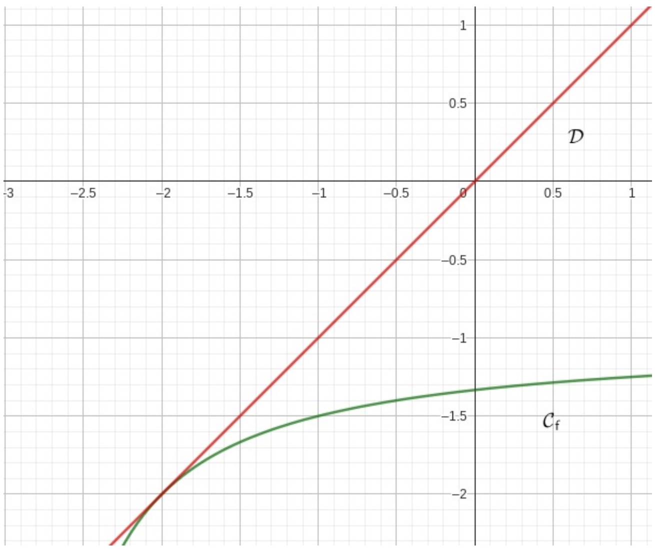
2. Déterminer l'espérance et l'écart type de X (si besoin, arrondir au centième).

3. Interpréter les valeurs obtenues.

Exercice 3 (5,5 pts) : On considère la fonction f définie sur $]-3\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-x-4}{x+3}$.

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \dfrac{-u_n - 4}{u_n + 3} = f(u_n) \end{cases}$$



1. On a tracé une partie de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f, et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.
   Sur le graphique, placer u_0, u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses.
   Faire apparaître les traits de construction.

2. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (u_n) ? sur sa limite ?

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}$$

   a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

   b) En déduire que pour tout entier naturel n

$$u_n = \frac{1}{n + 0{,}5} - 2.$$

   c) Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?