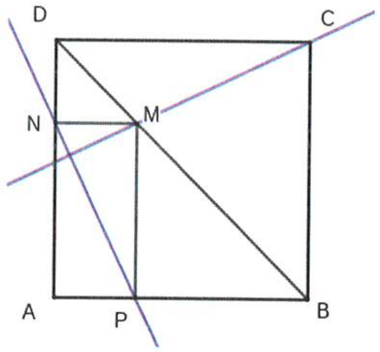
Dev n°8 - Produit Scalaire - Géométrie - 1ère spé maths

14 mai 2025 - 1h...

Exercice 1 (4 pts) :



$ABCD$ est un carré de côté 1.
On note M un point de la diagonale $[BD]$.
Les points N et P sont tels que $APMN$ est un rectangle.
On veut montrer que les droites (CM) et (PN) sont perpendiculaires.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

1. a) Donner les coordonnées des points A, B, C et D.
   b) Déterminer l'équation réduite de la droite (DB).
   c) On note a l'abscisse du point M ; exprimer son ordonnée en fonction de a.
   d) En déduire les coordonnées des points N et P.
2. Montrer que les droites (CM) et (PN) sont perpendiculaires.

Exercice 2 (4 pts) : $[AB]$ est un segment de longueur 8 cm, et I est le milieu de $[AB]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - 16$.
2. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -10$.
3. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -18$.

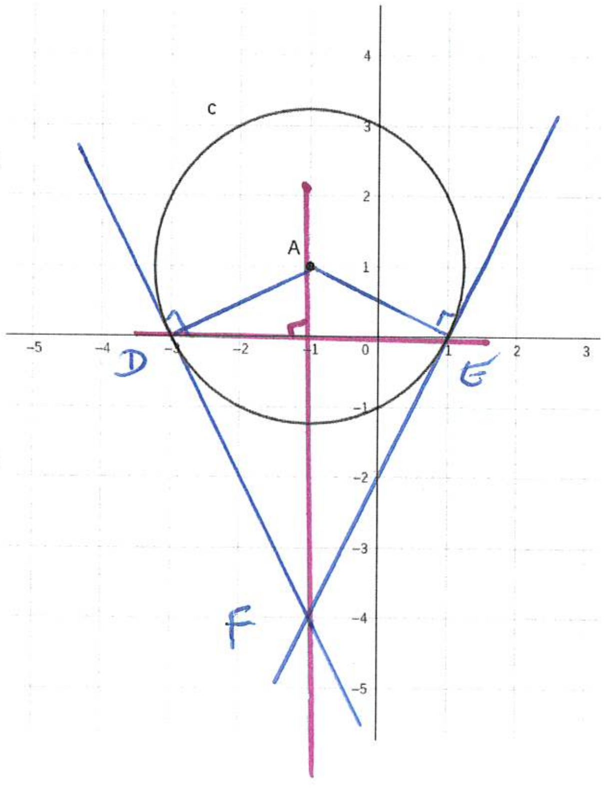
Exercice 3 (5 pts) : Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
On considère la droite (d) d'équation $-x + 3y - 4 = 0$ et le point $A(1; 2)$.

1. Le point A appartient-il à (d) ?
2. Donner un vecteur normal à la droite (d).
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d') perpendiculaire à (d) passant par A.
4. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de A sur la droite (d).

Exercice 4 (7 pts) : Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

On considère le cercle $(\mathscr{C})$ de centre $A(-1; 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$ tracé dans le repère ci-contre.

1. Déterminer une équation cartésienne de $(\mathscr{C})$.
2. Déterminer les coordonnées des points D et E intersections de $(\mathscr{C})$ et de l'axe des abscisses.
3. Déterminer une équation cartésienne des tangentes à $(\mathscr{C})$ aux points D et E.
4. Calculer les coordonnées du point F intersection de ces deux tangentes.
5. Montrer que les droites (AF) et (DE) sont perpendiculaires.



Ex1 : Dans le repère orthonormé $(A;\vec{AB},\vec{AD})$

1) a) $A(0;0)$

$B(1;0)$

$C(1;1)$

$D(0;1)$

$M(a;1-a)$

$N(0;1-a)$

$P(a;0)$

b) $\vec{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (BD)

donc $(BD) : x+y+c=0$

$D\in(BD) \iff 0+1+c=0 \iff c=-1$

(BD) a pour équation $x+y-1=0$

soit $\underline{y=-x+1}$

c) $M(a;y_M)\in(BD) \iff \underline{y_M=-a+1}$

d) $\begin{cases} x_N=0 \text{ et } y_N=y_M=1-a & \underline{N(0;1-a)} \\ x_P=x_M=a \text{ et } y_P=0 & \underline{P(a;0)} \end{cases}$

2) $\vec{CM}\begin{pmatrix}a-1\\-a\end{pmatrix}$ $\vec{PN}\begin{pmatrix}-a\\1-a\end{pmatrix}$

$\vec{CM}\cdot\vec{PN} = (a-1)\times(-a) + (-a)\times(1-a)$

$= -a^2+a-a-a^2$

$=0$

Donc $\vec{CM}\perp\vec{PN}$ et $\underline{(CM)\perp(PN)}$

Ex2 : $AB=8\text{cm}$ et I milieu de $[AB]$

1) d'après le théorème de la médiane

$\vec{MA}\cdot\vec{MB} = MI^2 - IA^2$ or $IA=\frac{1}{2}AB=4$ cm

donc on a bien $\underline{\vec{MA}\cdot\vec{MB}=MI^2-16}$

2) $\mathcal{E}=\{M / \vec{MA}\cdot\vec{MB}=-10\}$

$M\in\mathcal{E} \iff MI^2-16=-10 \iff MI^2=6 \iff MI=\sqrt{6}$

$\underline{\mathcal{E}\text{ est le cercle de centre } I \text{ de rayon}}\ \sqrt{6}$

3) $\mathcal{F}=\{M / \vec{MA}\cdot\vec{MB}=-18\}$

$M\in\mathcal{F} \iff MI^2-16=-18 \iff MI^2=-2$

impossible

$\underline{\mathcal{F}=\emptyset}$

Ex3 : $(d) : -x + 3y - 4 = 0$ et $A(1;2)$

1) $-1 + 3 \times 2 - 4 = 6 - 5 = 1$ $\quad 1 \neq 0 \quad$ $A \notin (d)$

2) $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d)

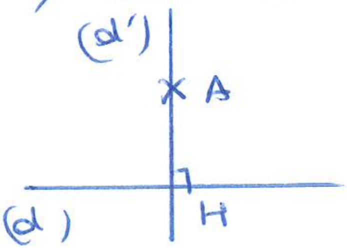
3) $(d') \perp (d)$ donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (d')

alors $(d') : 3x + y + c = 0$

$A \in (d') \iff 3 + 2 + c = 0 \iff c = -5$

donc (d') a pour équation $3x + y - 5 = 0$

4) Soit H le projeté orthogonal de A sur (d)



H est l'intersection de (d) et (d')

$$\begin{cases} -x + 3y = 4 & (L_1) \\ 3x + y = 5 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 10y = 17 & (3L_1) + (L_2) \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 17/10 \\ x = 11/10 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} 3x + \frac{17}{10} = 5 \\ 3x = \frac{33}{10} \end{array} \right)$$

$H(11/10 \,;\, 17/10)$

Ex4 : 1) $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A ; \sqrt{5})$ avec $A(-1;1)$

$\mathcal{C} : (x+1)^2 + (y-1)^2 = 5$

2) pour $y = 0$, on a $(x+1)^2 + 1 = 5 \iff (x+1)^2 = 4$

$\iff x + 1 = 2$ ou $x + 1 = -2$

$\iff x = 1$ ou $x = -3$

$\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en $D(-3;0)$ et $E(1;0)$

3) Soit T_D tangente à $\mathcal{C}$ en D alors $T_D \perp (AD)$ et $D \in T_D$.

$\vec{AD}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ vecteur normal à T_D

$T_D : -2x - y + c = 0$

$D \in T_D \iff 6 + c = 0 \iff c = -6$

donc T_D a pour équation $-2x - y - 6 = 0$

ou $2x + y + 6 = 0$

de même soit T_E tangente à $\mathcal{C}$ en E

$\vec{AE}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ $\quad T_E : 2x - y + c' = 0$ 2,5

$E \in T_E \Leftrightarrow 2 + c' = 0 \Leftrightarrow c' = -2$

donc $T_E : 2x - y - 2 = 0$

4) $\begin{cases} 2x + y = -6 & (L_1) \\ 2x - y = 2 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -4 & (L_1)+(L_2) \\ 2x + y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$

T_E et T_D se coupent en $F(-1;-4)$ 1

5) $\vec{AF}\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$ $\quad \vec{DE}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AF}\cdot\vec{DE} = 0\times 4 + (-5)\times 0 = 0$

$\vec{AF}\perp\vec{DE} \Leftrightarrow (AF)\perp(DE)$ 1

Ex 5 (Bonus)

1) $x^2+y^2-4x+3=0$

$\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2-4+3=0$

$\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2=1$

$(\mathcal{C})$ est le cercle de centre $I(0;2)$ de rayon 1

2) $\mathcal{D} : y = ax$ $\quad (a\in\mathbb{R})$

on remplace dans l'équation du cercle

$x^2+(ax)^2-4x+3=0$

$\Leftrightarrow (a^2+1)x^2-4x+3=0$

$a^2+1\neq 0$ pour tout $a\in\mathbb{R}$ donc c'est une équation du second degré

$\Delta_a = 16-4\times(a^2+1)\times 3$

$= 16-12a^2-12$

$= 4-12a^2$

$= 4(1-3a^2)$

$\Delta_a = 0 \Leftrightarrow 3a^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = 1/3 \Leftrightarrow a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

a	$-\infty$		$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$		$+\infty$
Δ_a		$-$	0	$+$	0	$-$	

$-3<0$

- pour $a < \frac{-\sqrt{3}}{3}$ ou $a > \sqrt{3}/3$, $\Delta_a<0$ pas d'intersection
- pour $a = \pm\sqrt{3}/3$, $\Delta_a = 0$, une seule intersection
- pour $-\sqrt{3}/3 < a < \sqrt{3}/3$, deux intersections $(\Delta_a)>0$