Dev n°9 - Fonction Exponentielle - 1ère spé maths

23 mai 2025 - 50 min

Exercice 1 (8 pts) :

1. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-2x+6} + 3$$

   a) Montrer que $f'(x) = (-2x+5)\mathrm{e}^{-2x+6}$.

   b) Etudier les variations de f.

2. Le bénéfice (en millions d'euros) d'une grande entreprise en fonction de la quantité x (en tonnes) de métal vendue est donnée par la fonction f.

   a) En utilisant la calculatrice, déterminer la quantité minimale (au centième près) que doit vendre l'entreprise pour réaliser un bénéfice.

   b) Quel est le bénéfice maximal (arrondir au miller d'euro) ? Pour quelle quantité de métal vendue ?

Exercice 2 (8 pts) : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x+1}{\mathrm{e}^x - 1}$$

1. Soit $g(x) = -x\mathrm{e}^x - 1$ pour tout réel $x \in [0;+\infty[$.

   a) Etudier le sens de variation de g.

   b) Calculer $g(0)$, et en déduire le signe de $g(x)$.

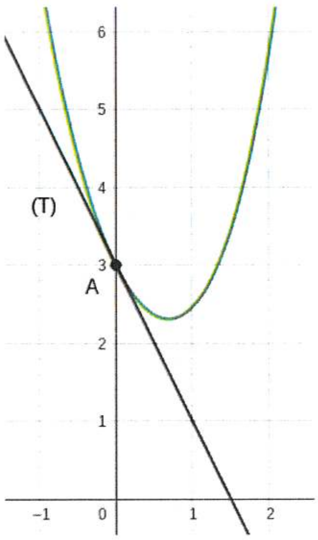
2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$; en déduire les variations de f.

Exercice 3 (5 pts) :

Ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + ax + b\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont deux nombres réels.
T est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.



1. Lire graphiquement la valeur de $f(0)$ et de $f'(0)$ (justifier brièvement).
2. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer les valeurs de a et b.

Exercice 4 (Bonus) : Soient f et g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x\mathrm{e}^{-x} - 2x$$

Soient $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Que peut-on dire des tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ au point O ?

Ex1 : 1) $f(x) = (x-2)\,e^{-2x+6} + 3$ sur $\mathbb{R}$

18

a) $f = uv \quad f' = u'v + uv'$

$f'(x) = 1 \times e^{-2x+6} + (x-2)\,e^{-2x+6} \times (-2)$

$= (1 - 2x + 4)\,e^{-2x+6}$

$= (5 - 2x)\,e^{-2x+6}$

/2

b) $e^{-2x+6} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(-2x+5)$

x	$-\infty$		$5/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

donc f strictement croissante sur $]-\infty ; 5/2]$ puis décroissante sur $[5/2 ; +\infty[$

/2

2) f est le bénéfice en millions d'€ pour x tonnes de métal

a) on cherche $f(x) \geq 0$. D'après la calculatrice /2

$\begin{cases} f(1{,}75) < 0 \\ f(1{,}76) > 0 \end{cases}$ L'entreprise réalisera un bénéfice à partir de 1,76 t produites et vendues

b) d'après la question 1) b) le bénéfice maximal est atteint pour $x = 2{,}5$ soit 2,5 t produites et vendues

Il sera de $f(2{,}5) = 0{,}5e + 3 \simeq 4{,}359$ /2

environ 4 359 000 €.

Ex2 : $f(x) = \dfrac{x+1}{e^x - 1}$ sur $]0 ; +\infty[$

18

1) $g(x) = -xe^x - 1$ sur $[0 ; +\infty[$

a) $g'(x) = -1 \times e^x + (-x) \times e^x = (-1-x)\,e^x$ 1,5

$e^x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $(-1-x)$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$g(0)$	$\searrow$	

1,5

b) $g(0) = -1$ est le maximum de g sur $[0 ; +\infty[$

donc $g(x) < 0$ 1,5

2) $f = \dfrac{u}{v} \quad f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$f'(x) = \dfrac{1 \times (e^x - 1) - (x+1)\,e^x}{(e^x - 1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{\cancel{e^x} - 1 - xe^x - \cancel{e^x}}{(e^x-1)^2} = \dfrac{-xe^x - 1}{(e^x - 1)^2}$

On a donc $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$ 2 $(e^x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

$g(x) < 0$ donc $f'(x) < 0$ 1,5

et f strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

Ex3 : $f(x) = e^x + ax + be^{-x}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

sur $\mathbb{R}$

15

1) $A(0;3) \in \mathcal{C}_f \iff f(0) = 3$ 0,75

$f'(0)$ est le coefficient directeur de T

on lit $f'(0) = -2$ 1,25

2) $f'(x) = e^x + a - be^{-x}$ 1

3) $f(0) = 3 \iff e^0 + 0 + b\,e^0 = 3 \iff 1 + b = 3 \iff b = 2$

$f'(0) = -2 \iff e^0 + a - b\,e^0 = -2 \iff 1 + a - 2 = -2 \iff a = -1$ 2

$f(x) = e^x - x + 2be^{-x}$ +0,25

Ex4 : $f(x) = xe^{-x}$ et $g(x) = xe^{-x} - 2x = f(x) - 2x$

sur $\mathbb{R}$

$\begin{cases} f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1-x)e^{-x} \\ g'(x) = f'(x) - 2 = (1-x)e^{-x} - 2 \end{cases}$

$\begin{cases} f(0) = g(0) = 0 \\ f'(0) = e^0 = 1 \end{cases}$ et $g'(0) = e^0 - 2 = -1$ coefficients directeurs respectivement de T_0 et T'_0 les tangentes en 0 à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

$T_0 : y = x$ $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $T'_0 : y = -x$ $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ vecteurs directeurs

$\vec{u} \cdot \vec{u'} = 1 - 1 = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{u'} \iff \boxed{T_0 \perp T'_0}$