Test n°3 - Suites Arithmétiques - Variations d'une Suite - 1ère spé maths

17 janvier 2025 - 30 min

Exercice 1 (2 pts) : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 4$.

1. Exprimer u_n en fonction de n (pour tout $n \in \mathbb{N}$) ; calculer u_{40}.
2. Calculer la somme $S = \Sigma_{i=1}^{i=40} u_i = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{39} + u_{40}$.

Exercice 2 (2,5 pts) : Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_4 = 5$ et $u_{24} = 39$.

1. Déterminer la raison de la suite (u_n) ainsi que son premier terme u_1.
2. Calculer $S = \Sigma_{i=4}^{i=24} u_i = u_4 + u_5 + \cdots + u_{23} + u_{24}$.

Exercice 3 (2 pts) : Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? Justifier soigneusement.

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 5n - 6$.
2. (v_n) définie par $v_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = 2v_n + 7$.

Exercice 4 (1,5 pts) : Calculer les sommes

1. $S = \Sigma_{i=1}^{i=2025} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2024 + 2025$.
2. $S = \Sigma_{i=5}^{i=500} i = 5 + 6 + 7 + \cdots + 499 + 500$.

Exercice 5 (2 pts) : Déterminer le sens de variation de chacune des suites suivantes

1. $u_n = n^2 - 3n + 12$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. (Bonus) $v_n = \dfrac{3^n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 6 (Bonus) : Calculer la somme

$$S = -2 + 1 + 4 + 7 + \cdots + 82 + 85$$

Ex1 : $\begin{cases} r = -2 \\ u_0 = 4 \end{cases}$ 12

1) $u_n = u_0 + n \times r \iff u_n = 4 - 2n$ $(n \in \mathbb{N})$

$u_{40} = 4 - 2 \times 40 = -76$ 1

2) $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{40} = \dfrac{(u_0 + u_{40}) \times 41}{2} = \dfrac{(4-76) \times 41}{2} = -1476$ 1

Ex2 : 1) $\begin{cases} u_4 = 5 \\ u_{24} = 39 \end{cases}$

$u_{24} = u_4 + 20 \times r \iff 39 = 5 + 20r \iff 34 = 20r \iff r = 1{,}7$

$u_4 = u_1 + 3r \iff 5 = u_1 + 5{,}1 \iff u_1 = -0{,}1$ 1,5

2) $S = \dfrac{(u_4 + u_{24}) \times 21}{2} = \dfrac{44 \times 21}{2} = 462$ 1

/2,5

Ex3 : 1) $u_n = 5n - 6$ $(n \in \mathbb{N})$

On reconnaît $u_n = u_0 + n \times r$; $u_n = -6 + n \times 5$

(u_n) est une suite arithmétique de raison 5 de terme initial $u_0 = -6$

2) $\begin{cases} v_1 = -1 \\ v_{n+1} = 2v_n + 7 \ (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

$v_2 = 2v_1 + 7 = 5$

$v_3 = 2v_2 + 7 = 17$

1/2

$v_2 - v_1 = 6$ et $v_3 - v_2 = 12$

$6 \neq 12$

Donc (v_n) n'est pas une suite arithmétique

Ex4 : 1) $S = \sum_{i=1}^{2025} i = \frac{(1+2025) \times 2025}{2} = 2\,051\,325$

2) $S = \sum_{i=5}^{500} i = \frac{(5+500) \times 496}{2} = 125\,240$

0,5 1 4,5

Ex5 : 1) $u_n = n^2 - 3n + 2$ $(n \in \mathbb{N})$

$u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 - 3x + 2$ sur $[0 ; +\infty[$

$f'(x) = 2x - 3$

x	0		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$f(3/2)$	$\nearrow$	

1/2

f strictement croissante sur $[3/2 ; +\infty[$

donc (u_n) croissante à partir de $n = 2$

or $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$

donc (u_n) croissante pour $n \geq 1$

2) $v_n = \frac{3^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$v_{n+1} - v_n = \frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n} = \frac{3^{n+1} \times n - 3^n \times (n+1)}{n(n+1)}$

alors $v_{n+1} - v_n = \frac{3^n(3n - n - 1)}{n(n+1)} = \frac{3^n(2n-1)}{n(n+1)}$

pour $n \geq 1$, $3^n > 0$, $n > 0$, $n+1 > 0$ et $2n - 1 > 0$

donc $v_{n+1} - v_n > 0$ alors (v_n) est croissante

Ex6 : $S = -2 + 1 + 4 + \dots + 85$

Suite arithmétique

$u_0 = -2$

$r = 3$

$u_n = u_0 + n \times r$

$\Leftrightarrow 85 = -2 + 3n$

$\Leftrightarrow 3n = 87$

$\Leftrightarrow n = 29$

Donc $S = \sum_{i=0}^{29} u_i = \frac{(-2+85) \times 30}{2}$

$S = 1245$