Test n°4 - Suites Géométriques - Variations d'une Suite - 1ère spé maths

29 janvier 2025 - 30 min

Exercice 1 (2 pts) : Soit (u_n) une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $u_0 = 4$.

1. Exprimer u_n en fonction de n (pour tout $n \in \mathbb{N}$) ; calculer u_{10}.
2. Calculer la somme $S = \Sigma_{i=0}^{i=10} u_i = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_9 + u_{10}$ (~~arrondir à 10^{-3}~~).

Exercice 2 (2,5 pts) : Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_4 = 5$ et $u_7 = \frac{5}{27}$.

1. Déterminer la raison de la suite (u_n) ainsi que son premier terme u_1.
2. Calculer $S = \Sigma_{i=4}^{i=24} u_i = u_4 + u_5 + \cdots + u_{23} + u_{24}$.

Exercice 3 (2 pts) : Les suites suivantes sont-elles géométriques ? Justifier soigneusement.

1. (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -3 \times 4^n$.
2. (v_n) définie par $v_1 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = 2v_n - 3$.

Exercice 4 (1,5 pts) : Calculer les sommes

1. $S = 1 + 4 + 16 + \cdots + 262144$.
2. $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdots - \frac{1}{256}$. (arrondir à 10^{-3})

Exercice 5 (2 pts) : Déterminer le sens de variation de chacune des suites suivantes

1. $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. (Bonus) $v_n = -2 \times (\frac{3}{2})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. (Bonus) $w_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Ex1 1) $u_n = u_0 \times q^n = 4 \times (-2)^n$ donc $u_{10} = 4 \times (-2)^{10} = 4096$

2) $S = \sum_{i=0}^{10} u_i = \frac{u_0 - u_{11}}{1-q} = u_0 \times \frac{1-q^{11}}{1-q}$

donc $S = 4 \times \frac{1-(-2)^{11}}{1-(-2)} = \frac{4}{3}\left(1-(-2)^{11}\right) = 2732$

Ex2 : 1) $\begin{cases} u_4 = 5 \\ u_7 = \frac{5}{27} \end{cases}$ $u_7 = u_4 \times q^3 \iff \frac{5}{27} = 5 \times q^3 \iff q^3 = \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$

$\iff q = 1/3$

$u_4 = u_1 \times q^3 \iff 5 = u_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \iff u_1 = 5 \times 3^3 \iff u_1 = 135$

2) $S = \frac{u_4 - u_{25}}{1-q} = \frac{5 - 5 \times (1/3)^{21}}{1 - 1/3} = \frac{15}{2}\left(1 - (1/3)^{21}\right) \simeq 7,5$

Ex3 : 1) $u_n = -3 \times 4^n$ $(n \in \mathbb{N})$

on reconnait $u_n = u_0 \times q^n$ avec $u_0 = -3$ et $q = 4$

c'est une suite géométrique.

2) $\begin{cases} v_1 = -1 \\ v_{n+1} = 2v_n - 3 \end{cases}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ $v_2 = -2-3 = -5$ $v_3 = -10-3 = -13$

$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-5}{-1} = 5$ $\frac{v_3}{v_2} = \frac{-13}{-5} = \frac{13}{5}$ $5 \neq \frac{13}{5}$

donc (v_n) n'est pas géométrique

Ex4 : 1) $S = 1 + \overset{\times 4}{4 + 16} + \cdots + 262\,144$

$= \frac{1 - 262\,144 \times 4}{1-4} = 349\,525$

2) $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots - \frac{1}{256} = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{-1}{256}\right) \times \left(\frac{-1}{2}\right)}{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)}$

$\times\left(\frac{-1}{2}\right)$

$S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{512}\right) \times \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{512}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{256}\right)$

$S \simeq 0{,}332$

Ex5 : 1) $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ $u_n = f(n)$

avec $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$ sur $[0 ; +\infty[$

$f'(x) = \frac{3(x+1) - (3x-2) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$

$f'(x) > 0$ donc f strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

Alors (u_n) croissante

2) $v_n = -2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$

$v_{n+1} - v_n = -2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + 2\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n \left(-\frac{3}{2} + 1\right)$

$= 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$v_{n+1} - v_n < 0$ donc (v_n) décroissante

3) $w_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$w_{n+1} - w_n = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \cdots = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)}$

$w_{n+1} - w_n < 0$ donc (w_n) décroissante