

Devoir de Mathématiques N° 4 (1H15)

Exercice 1 (2,5 pts) :

Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x; y)$ solutions de l'équation : $x^2 - 2xy - 7 = 0$

Exercice 2 (3 pts) : Soit $A_n = 4^{2n+3} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est divisible par 5.

Exercice 3 (3 pts) :

1. Ecrire la liste des nombres premiers inférieurs à 50.
2. Le nombre 1 517 est-il premier ? (justifier soigneusement la démarche)
3. Quels sont les entiers naturels a et b vérifiant $a^2 = b^2 + 1\,517$?

Exercice 4 (11,5 pts) : Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n .

1. a) Vérifier que $S(6) = 12$.
b) Calculer $S(7)$ et $S(45)$.
2. Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il calcule et affiche $S(n)$ pour un entier n donné.

```

1 Demander un entier naturel n
2 S=0
3 pour i allant de ..... faire
4   si ..... alors
5     S=.....
6   fin si
7 fin pour
8 Afficher .....
```

3. a) Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $S(n) \geq 1 + n$.
b) Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n) = 1 + n$?
4. On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$, avec p, q des nombres premiers distincts. Démontrer que $S(n) = (1 + p)(1 + q)$.
5. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k , où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul.
a) Quels sont les diviseurs de n ?
b) En déduire que $S(n) = \frac{1 - p^{k+1}}{1 - p}$.
6. On considère la proposition suivante :
« Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts, $S(n \times m) = S(n) \times S(m)$ ».
Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Exercice 5 (Bonus) :

Montrer que, si les nombres p et $8p - 1$ sont premiers, alors $8p + 1$ est composé. On pourra raisonner avec le reste de la division euclidienne de p par 3.