

Devoir de Mathématiques N° 8 (1h...)

Exercice 1 (5 pts) : ROC

Soient a, a', b et b' des entiers relatifs, et soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

1. Montrer que $a \equiv a'(n)$ et $b \equiv b'(n) \Rightarrow a \times b \equiv a' \times b'(n)$
2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $a \equiv a'(n) \Rightarrow a^p \equiv a'^p(n)$

Exercice 2 (10 pts) : En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergements : l'hébergement A et l'hébergement B.

Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.

Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.

On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B

1. a) Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.
b) Compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples $(x; y)$ possibles.

Entrée :	x et y sont des nombres	
Traitement :	Pour x variant de 0 ...	(1)
	Pour y variant de 0 ...	(2)
	Si ...	(3)
	Afficher x et y	
	Fin Si	
	Fin Pour	
	Fin Pour	
Fin traitement		

2. Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.
3. a) Justifier que l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.
b) Déterminer une telle solution.
c) Résoudre l'équation (E) : $8x + 15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.
4. Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.
Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B. Calculer ces nombres.

Exercice 3 (5 pts) :

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m + 5$ par 26 et on le note p .

Étape 3 : Au nombre p , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.
2. Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1 \pmod{26}$.
3. Démontrer alors l'équivalence :

$$9m + 5 \equiv p \pmod{26} \iff m \equiv 3p - 15 \pmod{26}.$$

4. Décoder alors la lettre B.
5. (Bonus) Décoder le message OBS VP.