Devoir de Mathématiques N^o 7 (1/2h)

Exercice 1 (10 pts) : Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 3u_n + 1$$

On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est entier.

1. Démontrer que les termes de la suite (u_n) sont alternativement pairs et impairs.
2. On admet que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 3^n - 1$.
   a) Déterminer le plus petit entier naturel non nul n tel que 3^n est congru à 1 modulo 7.
   b) En déduire que $u_{2\,022}$ est divisible par 7.
3. a) Sans justification, compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de m par 5	0	1	2	3	4
Reste de la division euclidienne de $3m+1$ par 5					

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n,
   si u_n est congru à 4 modulo 5, alors u_{n+4} est congru à 4 modulo 5.
   c) Existe-t-il $n \in \mathbb{N}$ tel que le reste de la division euclidienne de u_n par 5 soit égal à 2 ?

Bonus :

1. L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifier.
   Affirmation : « Si p est un nombre premier impair, alors u_p est premier. »
2. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $2u_n = 3^n - 1$
3. Calculer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des cinq premiers termes de la suite (u_n)