Devoir de mathématiques n^o 5 - TES

3 dec 2008 - 3H

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions, une et une seule des affirmations est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question puis recopier la bonne réponse en justifiant votre choix.

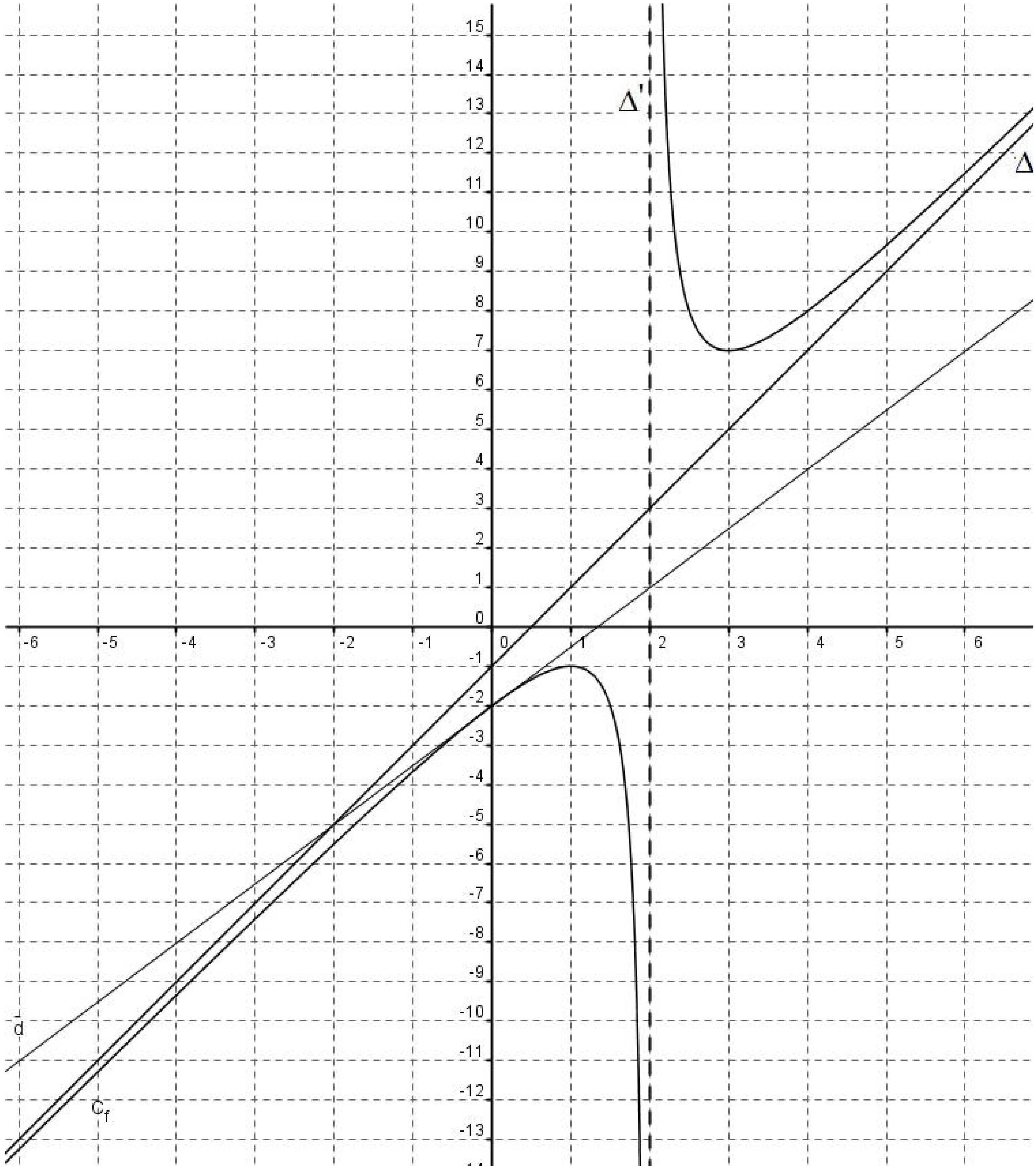
Soit f la fonction définie sur $]4;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-9x+12}{4-x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

1. Une autre expression de $f(x)$ est :
   $\bullet f(x) = -2x+1-\dfrac{2}{x-1}$ $\qquad$ $\bullet\ f(x) = -2x+1-\dfrac{8}{x-4}$ $\qquad$ $\bullet\ f(x) = 2x-1+\dfrac{8}{x-4}$
2. Soit f' la fonction dérivée de f sur $]4;+\infty[$. Une expression de $f'(x)$ est :
   $\bullet f'(x) = -2-\dfrac{8}{(x-4)^2}$ $\qquad$ $\bullet\ f'(x) = \dfrac{(2-x)(x-6)}{(x-4)^2}$ $\qquad$ $\bullet\ f'(x) = \dfrac{-2x^2+16x-24}{(x-4)^2}$
3. La courbe C_f admet pour asymptote :
   • la droite d'équation $y=4$ $\qquad$ • la droite d'équation $x=4$ $\qquad$ • la droite d'équation $y=4x$
4. La droite d'équation $y=2x+1$ est :
   • asymptote à C_f en $+\infty$ $\qquad$ • située au-dessus de la courbe C_f $\qquad$ • tangente à C_f au point d'abscisse 5

Exercice 2 (5 points)

La courbe C_f donnée en **annexe 1** représente la fonction f. On a :
– La tangente à C_f au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.
– La droite (d) est la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
– La droite Δ' est asymptote à la courbe C_f.
– La droite Δ est asymptote à C_f en $+\infty$ et $-\infty$.

1. Graphiquement, déterminer en précisant l'élément du texte permettant de répondre :
   (a) l'ensemble de définition D_f de f.
   (b) $f'(0)$
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. Déterminer graphiquement l'équation réduite de Δ (aucune justification n'est demandée)
3. La fonction f est de la forme $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+4}{x-2}$
   (a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{ax^2-4ax-2b-4}{(x-2)^2}$
   (b) En déduire la valeur des réels a et b
4. Pour la suite, on suppose $a=2$ et $b=-5$.
   En utilisant l'expression de f, retrouver, en justifiant par le calcul, les résultats suivants :
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
   (b) La droite Δ est asymptote à C_f en $+\infty$



Δ'
Δ
d
C_f

Exercice 3 (5 points)

Un musée très fréquenté propose à la vente trois sortes de billets :
– au prix de 5 €, un billet pour visiter uniquement le fond permanent des collections,
– au prix de 3 €, un billet pour visiter uniquement l'exposition temporaire,
– au prix de 6 €, un billet pour visiter le fond permanent des collections et l'exposition temporaire.

On sait que :
– 85% des visiteurs visitent le fond permanent,
– et 35% des visiteurs visitent l'exposition temporaire.

Un visiteur se présente à l'entrée du musée et achète un billet. On considère les événements suivants :
– F : "Le visiteur achète un billet à 5 €"
– E : "Le visiteur achète un billet à 3 €"
– M : "Le visiteur achète un billet à 6 €"

Les résultats demandés seront arrondis à 10^{-4} près.

1. (a) Recopier et compléter le système ci-contre : $\begin{cases} p(F)+p(E)+p(M)=1 \\ p(F)+p(M)=\ldots\ldots \\ p(E)+p(M)=\ldots\ldots \end{cases}$

   (b) Résoudre le système, et en déduire que $p(M)=0,2$, $p(F)=0,65$ et $p(E)=0,15$.

   (c) Calculer le prix de vente moyen d'un billet.

   Le musée propose à la vente un catalogue sur l'exposition temporaire. On sait que :
   – 35% des personnes qui ne visitent que l'exposition temporaire achètent le catalogue,
   – 25% des personnes qui visitent le fond permanent des collections
   et l'exposition temporaire achètent le catalogue,
   – 97% des visiteurs du seul fond permanent des collections n'achètent pas le catalogue.

   On note C l'événement : "Le visiteur achète le catalogue".

   On pourra faire un arbre pour faciliter la réponse aux questions.

2. Calculer $p(C\cap F)$, puis démontrer que $p(C)=0,122$.

3. Un visiteur a acheté le catalogue. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas visité l'exposition temporaire ?

4. Quelle est la probabilité que, parmi quatre visiteurs du musée venus indépendamment les uns des autres, au moins l'un d'entre eux n'ait pas acheté le catalogue ?

Exercice 4 (6 points)

Partie A - Etude de fonction :

Soit la fonction numérique C définie sur $[0;300]$ par :

$$C(x) = \frac{x^3}{30} - 15x^2 + 2500x + 500$$

1. (a) Calculer $C'(x)$, où C' désigne la fonction dérivée de C.
   (b) Etablir le tableau de variations de C sur $[0;300]$.
2. On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction C dans un repère orthogonal (unités graphiques : $0,5$ cm pour 10 unités sur l'axe des abscisses et $0,5$ cm pour 10000 unités sur l'axe des ordonnées).
   On note A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 150 et T la tangente à $\mathcal{C}$ au point A.
   (a) Déterminer une équation de T.
   (b) Construire la courbe $\mathcal{C}$ et T dans le repère donné en **Annexe**.

Partie B - Application économique

Pour une entreprise E dont la production peut varier de 0 à 300 unités, le coût total (en euros) de fabrication de x unités est donné par la fonction C de la **partie A**
On appelle coût marginal la dépense occasionnée par la production d'un objet supplémentaire.
On choisit comme modélisation de ce coût marginal la fonction C_m définie par :

$$C_m(x) = C'(x)$$

On suppose que l'entreprise est en situation de monopole, ce qui a pour effet que la demande est uniquement fonction du prix. La relation liant le prix de vente p d'une unité et la demande x (en unités) est :

$$p(x) = -\frac{45x}{8} + 2750$$

autrement dit, quand x objets sont vendus, chacun l'est au prix $p(x)$

1. Exprimer, en fonction de x, la recette totale $R(x)$ pour la vente de x objets.
2. On appelle recette marginale l'augmentation de recette procurée par la vente d'un objet supplémentaire.
   On modélise cette recette marginale par :

   $$r_m(x) = R'(x) \text{ où } R' \text{est la fonction dérivée de R}$$

   Pour quelle valeur de x la recette marginale est-elle égale au coût marginal ?
3. Montrer que le bénéfice pour la production et la vente de x unités est donné par :

   $$B(x) = -\frac{x^3}{30} + \frac{75x^2}{8} + 250x - 500$$

4. Calculer $B'(x)$, où B' représente la fonction dérivée de B.
5. En déduire, en comparant avec la question 2, que le bénéfice est maximum quand la recette marginale est égale au coût marginal.