Devoir de mathématiques n^o 6 - TES

13 janvier 2009 - 2H

Exercice 1 (5 points)

Une entreprise fabrique un article qui doit répondre à des normes précises.
On considère que 8 % des articles produits ne sont pas conformes aux normes.
Un test de contrôle en fin de fabrication est censé repérer les articles non conformes ; cependant le test comporte une certaine marge d'erreur.

Une étude a établi que :
• 5 % des articles conformes aux normes sont refusés par le test ;
• 10 % des articles non conformes aux normes sont acceptés par le test.

On considère un article pris au hasard au moment de passer le test. On note :
C l'événement "l'article est conforme aux normes" ;
T l'événement "l'article est accepté par le test" ;
$\overline{\text{C}}$ et $\overline{\text{T}}$ désignent les événements contraires respectifs de C et T.

1. Déduire des données les probabilités $p(C)$, $p(\overline{C})$, $p_C(T)$, $p_{\overline{C}}(T)$, $p_C(\overline{T})$ et $p_{\overline{C}}(\overline{C})$ (on pourra faire un arbre).
2. Calculer $p(T \cap C)$ et $p(T \cap \overline{C})$; en déduire que $p(T) = 0,882$.
3. Quelle est la probabilité que le contrôle donne un résultat erroné ?
4. Le coût de fabrication d'un article est de 15 euros. Tout article refusé par le test est détruit. Chaque article accepté par le test est mis sur le marché et vendu 25 euros mais lorsqu'un tel article n'est pas conforme aux normes, l'entreprise doit rembourser 30 euros au client (prix d'achat plus 5 euros de frais de port) et l'article litigieux est détruit.
   Soit X le nombre indiquant le bénéfice ou la perte correspondant à un article choisi au hasard.
   (a) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
   (b) Dresser la loi de probabilité de la variable X en utilisant C, $\overline{C}$, T et $\overline{T}$.
   (c) Calculer l'espérance de cette loi. Quelle interprétation peut-on en donner ?

Exercice 2 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $]2;+\infty[$ par :

$$f(x) = (\frac{2x-5}{x-2})^3$$

1. On pose $u(x) = \dfrac{2x-5}{x-2}$; calculer $u'(x)$.
2. En déduire $f'(x)$ puis les variations de f.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en 2 ; en déduire les asymptotes à la courbe représentative de f.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une soltution unique α sur $]2;+\infty[$, et en donner une valeur approchée au dixième.

Exercice 3 ($2,5$ points)

1. Résoudre l'équation : $\ln(x^2) - \ln(1-x) = 2\ln 2$
2. Déterminer le plus grand entier n tel que : $0,95^n \leq 0,1$

Exercice 4 ($6,5$ points)

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + 3\frac{\ln x}{x}$$

et la courbe $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en 0 ; en déduire les asymptotes à $\mathscr{C}$.
2. Calculer $f'(x)$; déterminer le signe de $f'(x)$ *(il faudra résoudre l'inéquation* $1 - \ln x \geq 0$*)*.
3. En déduire le tableau de variations de f.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
5. Construire $\mathscr{C}$ dans le repère ci-dessous.