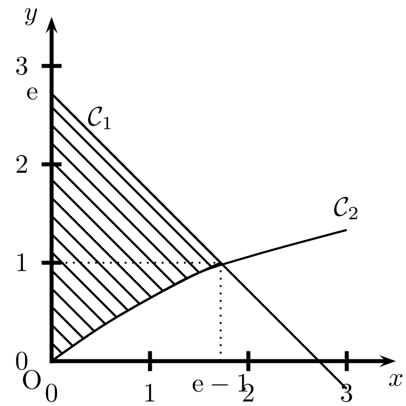
Devoir de mathématiques n^o 8 - TES

17 février 2009 - 2H

Exercice 1 (6 points)



Sur la figure ci-contre, on donne les représentations graphiques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de deux fonctions f_1 et f_2 définies et dérivables sur $[0; 3]$.

1. L'une des deux courbes représentées ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0; 3]$ par $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$.
   Laquelle de ces deux courbes ne peut pas convenir ?

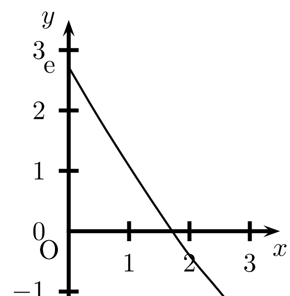


Figure 2

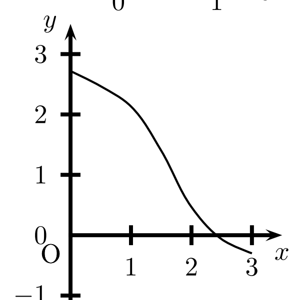


Figure 3

2. (a) Donner le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[0; 3]$.
   (b) Donner le tableau de signes de la fonction f' dérivée de f sur l'intervalle $[0; 3]$.
3. On note F une primitive de f sur $[0; 3]$. Indiquer les variations de F sur l'intervalle $[0; 3]$.
4. L'une des trois fonctions représentées ci-contre est la représentation graphique d'une fonction F.
   Justifier que les courbes représentées sur les figures 5 et 6 ne peuvent pas convenir.

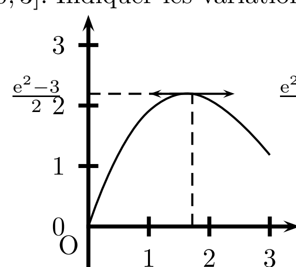


Figure 4

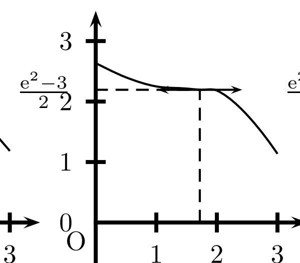


Figure 5

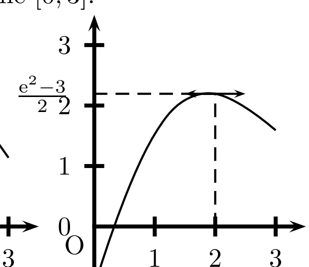


Figure 6

5. Donner la valeur exacte de $\displaystyle\int_0^{e-1} f(x)\,dx$.
6. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré sur la figure 1.

Exercice 2 (5 points)

Une entreprise peint des jouets. Pour cela, elle utilise deux machines M_1 et M_2 ; la machine M_1 peint un quart de la production. On sait que la machine M_1 peint correctement un jouet avec une probabilité de 0,85 alors que la machine M_2, plus récente, le fait avec une probabilité de 0,95.
Tous les jouets sont mélangés puis acheminés ensemble vers l'unité d'emballage.
On choisit alors un jouet au hasard, tous les choix étant équiprobables.
On note :
– A_1 l'événement : "le jouet est peint par M_1"
– A_2 l'événement : "le jouet est peint par M_2"
– B l'événement : "le jouet est peint correctement".

1. (a) Représenter par un arbre pondéré la situation décrite.
   (b) Définir par une phrase l'événement $A_1 \cap B$, puis calculer sa probabilité.
   (c) Montrer que la probabilité de l'événement B, notée p, est égale à 0,925.
   (d) Le jouet choisi n'est pas peint correctement ; quelle est la probabilité pour qu'il provienne de la machine M_1 ?

2. *Dans cette question, on donnera les résultats arrondis à* 10^{-2} *près.*
On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante 4 jouets.
   (a) Quelle est la probabilité pour qu'un des 4 jouets exactement ne soit pas peint correctement ?
   (b) Quelle est la probabilité pour qu'un jouet au moins ne soit pas peint correctement ?

Exercice 3 (9 points)

L'objet du problème est l'étude de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = -\frac{x}{3} + \frac{\ln x}{x^2}$$

Partie A - Etude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur I=$]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{x^3}{3} - 2\ln x$

1. Etudier les variations de g sur I. (les limites de g en 0 et en $+\infty$ ne sont pas démandées)
2. (a) Montrer qu'il existe, sur $[1;2]$, un unique réel a tel que $g(a) = 0$; donner un encadrement de a à 10^{-2}.
   (b) Dresser le tableau de signes de $g(x)$ sur I.

Partie B - Etude de la fonction f

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

1. (a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$; interpréter graphiquement si nécesssaire.
   (b) Montrer que la droite D d'équation $y = -\frac{x}{3}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$; étudier leur position relative.
2. Démontrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$; en déduire le tableau de variation de f.
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère ci-dessous (unité : 2 cm sur les abscisses et 2 cm sur les ordonnées)

Partie C - Recherche d'une primitive de f - Calcul d'une intégrale

Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$

1. Calculer la fonction dérivée de F, notée F' ; en déduire l'expression d'une primitive de f sur I.
2. Soit A la partie du plan délimité par $\mathcal{C}$, la droite D et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.
   (a) Hachurer A sur la figure, et exprimer l'aire de A en unités d'aire à l'aide d'une intégrale.
   (b) (Bonus) Montrer que l'aire de A en unités d'aire est $-\frac{2}{e} + 1$; donner en $\mathbf{cm^2}$ une valeur approchée à 10^{-2}.