Exercice 1 *(5 points)*

Lors d'une enquête réalisée auprès de familles d'une région, concernant leur habitation principale, on apprend que 55 % des familles interrogées sont propriétaires de leur logement, 40 % en sont locataires et enfin 5 % occupent leur logement gratuitement (ces familles seront appelées dans la suite de l'exercice « occupant à titre gratuit ».)
Toutes les familles interrogées habitent soit une maison individuelle , soit un appartement ; toute habitation ne contient qu'une seule famille.
60 % des propriétaires habitent une maison individuelle, 80 % des locataires habitent un appartement et enfin 10 % des occupants à titre gratuit habitent une maison individuelle.
On interroge au hasard une famille de la région et on note :
A l'événement : « la famille habite un appartement » ;
L l'événement : « la famille est locataire » ;
P l'événement : « la famille est propriétaire » ;
G l'événement : « la famille est occupant à titre gratuit ».
On notera $p(\text{E})$ la probabilité de l'événement E. L'événement contraire de E sera noté $\overline{\text{E}}$.
$p(\text{E}/\text{F})$ désignera la probabilité conditionnelle de l'événement E par rapport à l'événement F.

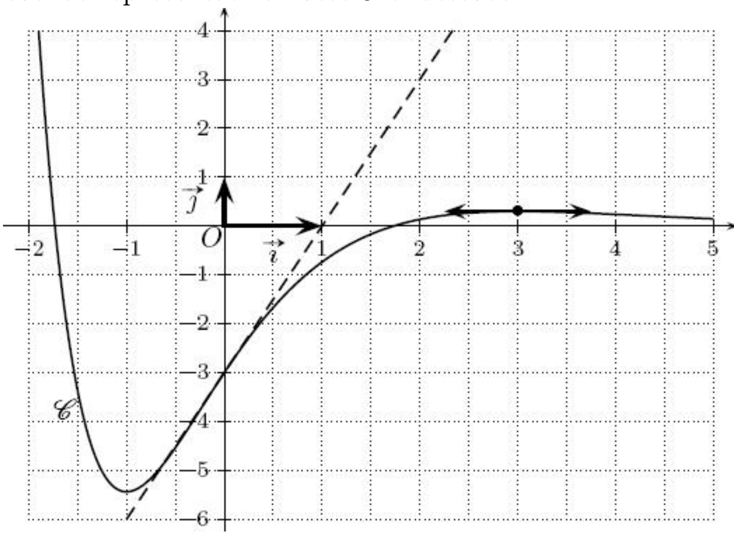
1. (a) Préciser à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes : $p\left(\overline{\text{A}}/\text{P}\right)$, $p(\text{A}/\text{L})$ et $p\left(\overline{\text{A}}/\text{G}\right)$.
   (b) Construire un arbre pondéré résumant la situation.
2. Calculer la probabilité de l'événement : « la famille est propriétaire et habite un appartement ».
3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,585
4. On interroge au hasard une famille habitant un appartement. Calculer la probabilité pour qu'elle en soit le propriétaire.
5. On interroge trois familles de la région, le choix de ces familles se faisant aléatoirement et de manière indépendante.
   Calculer la probabilité d'interroger trois familles habitant un appartement.

Exercice 2 (*5 points*)

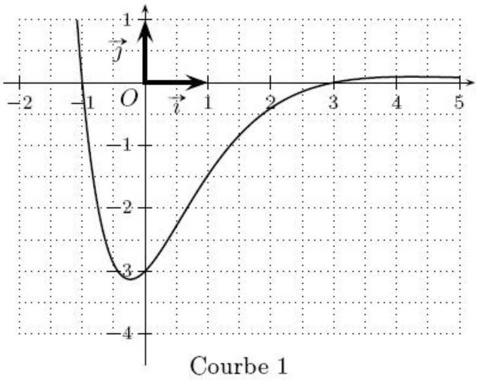
Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

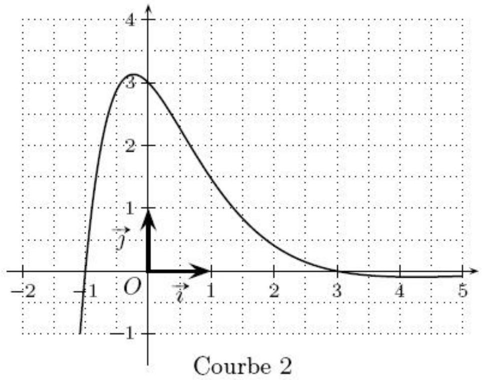
On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne la courbe représentative notée $\mathcal{C}$ ci-dessous.



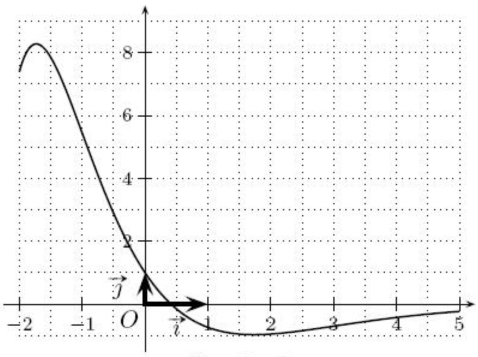
1. Lire sur le graphique $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(3)$.
2. Parmi les quatre courbes ci-dessous, se trouve celle représentant la fonction f'.
   La retrouver en justifiant la réponse.
3. On admet que la fonction f est définie par $f(x) = (x^2 + a)e^{bx}$ où a et b sont deux réels.
   (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.
   (b) A l'aide des valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$ obtenues à la question 1., calculer a et b.



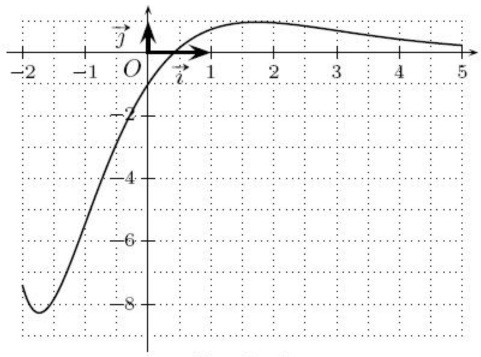
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on admet que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - 3\right)e^{-x}$

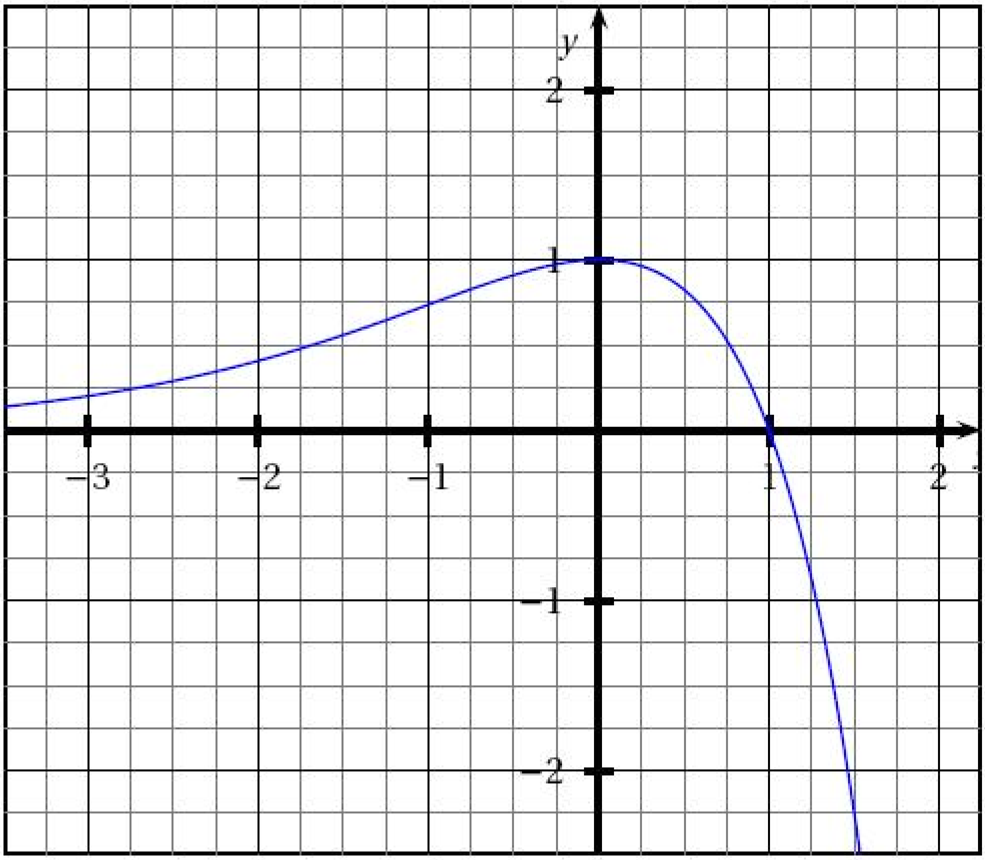
1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$
   En remarquant que $f(x) = \dfrac{x^2}{e^x} - \dfrac{3}{e^x}$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.
3. Justifier que le signe de $f'(x)$ est donné par celui de l'expression $-x^2 + 2x + 3$.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations complet de f.
5. L'étude des variations de f réalisée dans la question 4. permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique notée α.
   (a) Déterminer un encadrement d'amplitude $10^{-}2$ de α.
   (b) Prouver que le réel α est également solution de l'équation $ln\left(\dfrac{x^2 - 3}{2}\right) = x$ sur $]-\infty;\sqrt{3}[$.

Exercice 3 *(5 points)*

Soit la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (*figure ci-dessous*).



Partie A

1. Calculer la limite de f en $-\infty$ (on rappelle que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$).
   Interpréter graphiquement le résultat.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.

Partie B

Soit F la fonction définie pour tout réel x par

$$F(x) = (-x + 2)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Démontrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. On appelle $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.
   (a) Justifier l'égalité : $\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) À l'aide du graphique ci-dessus, justifier que : $0 < \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x < 1$.
   (c) Déterminer, en unités d'aire, la valeur exacte de $\mathcal{A}$ puis sa valeur décimale arrondie au centième.