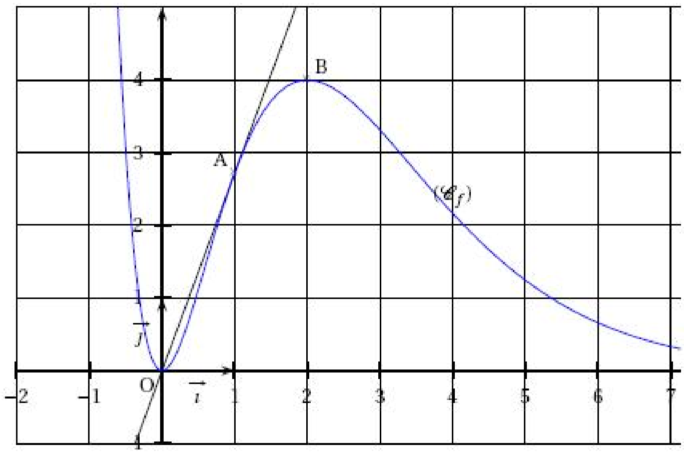
Exercice 1 *(5 points)*

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La figure ci-dessous montre une partie de sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormal .

On dispose des renseignements suivants sur la fonction f et la courbe $(\mathcal{C}_f)$:

- la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2]$, elle est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0]$ et sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$;
- la courbe $(\mathcal{C}_f)$ passe par l'origine du repère et par les points A$(1\,;\,\mathrm{e})$ et B$(2\,;\,4)$
- la droite (OA) est tangente en A à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et l'axe des abscisses est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.

On note f' la fonction dérivée de f et on note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.



Pour chacune des affirmations suivantes, en utilisant les informations données par l'énoncé, déterminer si l'affirmation est vraie ou fausse puis justifier la réponse.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. L'équation $f(x) = 0,1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

3. $f'(1) = f(1)$.

4. $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x < 8$.

5. La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$

6. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{f(x)}$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

b) $g'(1) = e^2$

Exercice 2 *(5 points)*

Un appareil de très haute technologie est installé dans un laboratoire d'analyse médicale. L'installateur assure une maintenance à l'issue de chaque semaine d'utilisation. Pour cette maintenance, soit il doit se déplacer (intervention directe sur l'appareil), soit une assistance téléphonique suffit.

À l'issue d'une semaine de fonctionnement, trois situations sont possibles :

- Situation A : l'appareil a fonctionné normalement ;
- Situation B : l'appareil a eu des arrêts épisodiques ;
- Situation C : l'appareil a eu des arrêts très fréquents.

Dans la situation A, l'installateur doit se déplacer 1 fois sur 2.

Dans la situation B, l'installateur doit se déplacer 7 fois sur 10.

L'installateur sait par expérience que, à l'issue de chaque semaine de fonctionnement,

- la probabilité d'être dans la situation A est $0,6$;
- la probabilité d'être dans la situation B est $0,3$;
- la probabilité qu'il doive se déplacer est $0,6$.

Partie A : L'appareil a été utilisé pendant une semaine.

On considère les évènements suivants :

A : « On se trouve dans la situation A »

B : « On se trouve dans la situation B »

C : « On se trouve dans la situation C »

S : « L'installateur se déplace »

T : « L'installateur effectue une assistance téléphonique ».

On pourra construire un arbre pondéré que l'on complétera au fur et à mesure.

1. Déterminer $p(S)$.
2. Calculer $p(A \cap S)$ et $p(B \cap S)$
3. Calculer $p(C \cap S)$ et en déduire que, lorsqu'on se trouve dans la situation C, la probabilité que l'installateur se déplace est $0,9$.
4. On sait que l'installateur ne s'est pas déplacé.
   Déterminer la probabilité que l'on ait été dans la situation B.

Partie B : L'installateur devra effectuer la maintenance trois semaines de suite

On admet que les événements qui surviendront au cours de chacune de ces trois semaines sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que l'installateur ait à effectuer exactement deux déplacements sur les trois semaines ?
2. Quelle est la probabilité que l'installateur ait à effectuer au moins un déplacement ?

Exercice 3 *(6 points)*

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = (x^2 - 3x + 3)\mathrm{e}^x - 4.$$

1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 appartenant à $]\,1\,;\,2[$.
Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de x_0.

3. Déduire des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur $[0\,;\,+\infty\,[$.

Partie B

Une entreprise fabrique un produit, en quantité x exprimée en tonnes, sa capacité de production ne pouvant dépasser 3 tonnes. Le coût total de fabrication de ce produit, en centaines de milliers d'euros, est donné par :

$$C_T(x) = (x - 3)\mathrm{e}^x + 3x + 4.$$

Le coût moyen est défini sur $]0\,;\,3]$ par la formule suivante :

$$C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x}.$$

1. Pour tout x de $]0\,;\,3]$ calculer $C'_m(x)$ et vérifier que l'égalité suivante est vraie : $C'_m(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.
En déduire le sens de variation de C_m sur $]0\,;\,3]$.

2. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum ?
Quel est le coût moyen minimum (arrondi au millier d'euros) d'une tonne de ce produit ?

Partie C

Une tonne du produit fabriqué est vendue 300 000 euros ; toute la production est vendue.

1. Le bénéfice algébrique, en centaines de milliers d'euros, réalisé après la fabrication et la vente de x tonnes du produit est noté $B(x)$. Montrer l'égalité suivante : $B(x) = (3 - x)\mathrm{e}^x - 4$.

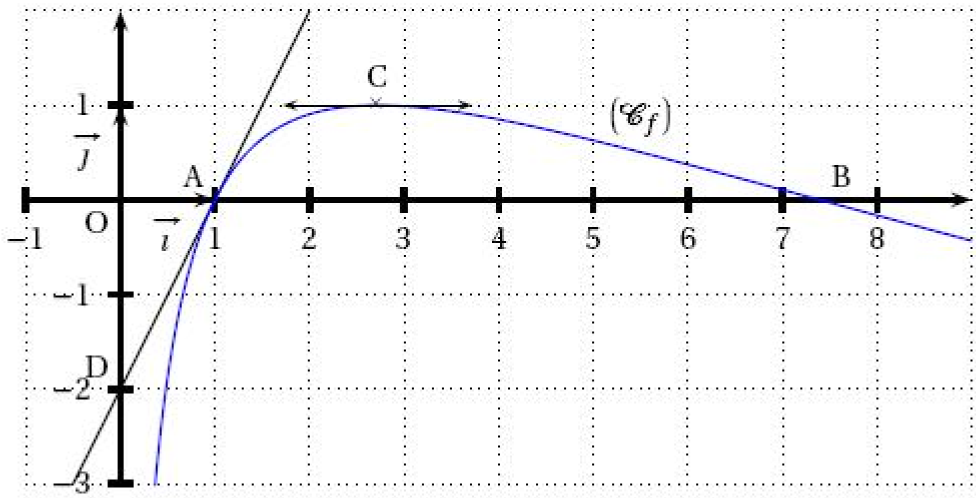
2. Étudier le sens de variation de B sur $[0\,;\,3]$.
Quelle est la production pour laquelle le bénéfice est maximum ?

Exercice 4 *(4 points)*

On admettra que les fonctions considérées dans cet exercice sont dérivables sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = (2 - \ln x)\ln x.$$

La figure ci-dessous donne la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f dans un repère orthonormal .
La courbe $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en $\mathrm{A}(1\,;\,0)$ et en B.
La tangente en C à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente en A à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des ordonnées en D.



1. Déterminer l'abscisse du point B (la valeur exacte est demandée).

2. Calculer la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.

3. On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x}$$

b) Déterminer, par le calcul, les coordonnées du point C et l'ordonnée du point D (les valeurs exactes sont demandées).

4. a) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x[f(x) + 2\ln x - 4].$$

Démontrer que g est une primitive de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b) Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} f(x)\,\mathrm{d}x$ et donner une interprétation géométrique de cette intégrale.