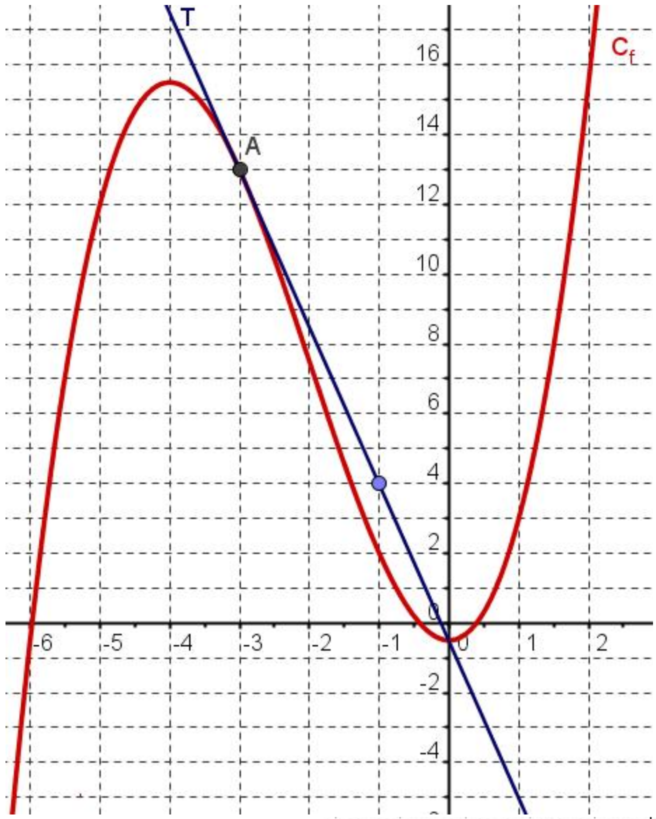
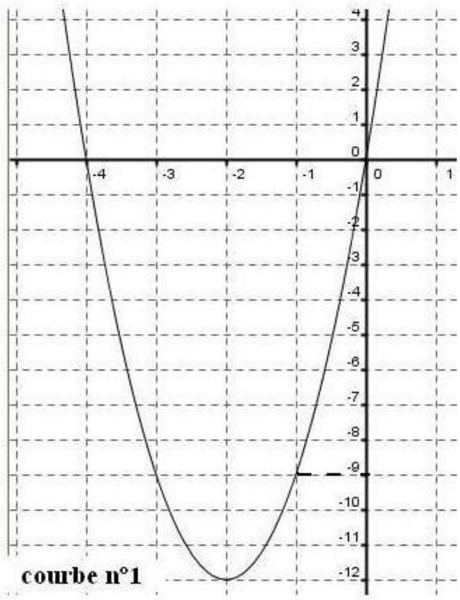
TES **DS 2** durée 2 h

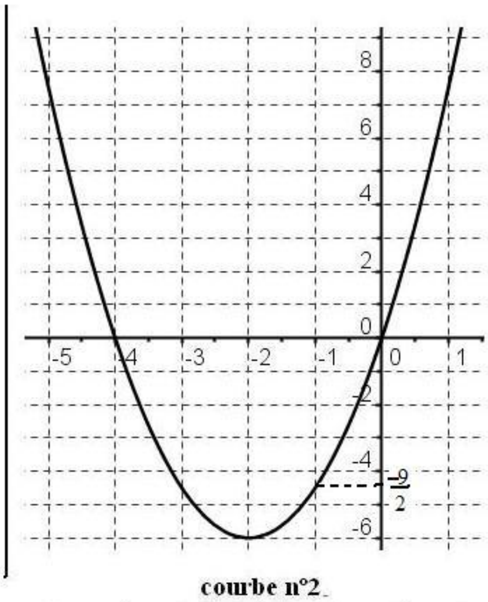
Exercice 1 *(6 points)*

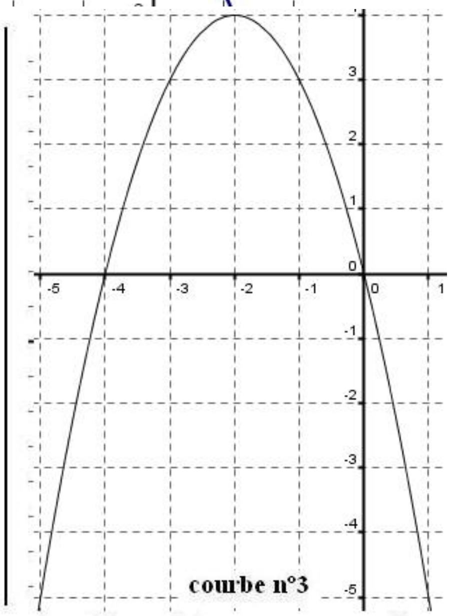


f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique C_f est donnée par la courbe ci-contre.
La droite T est la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse -3

1. Déterminer graphiquement $f'(-3)$ en justifiant la réponse.
2. Déterminer laquelle des trois courbes ci-dessous correspond à la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f en justifiant la réponse.
3. En déduire graphiquement $f'(-1)$.
   Donner l'équation réduite la tangente T à C_f au point d'abscisse -1 de puis la tracer dans le repère ci-contre.







Exercice 2 *(6 points)*

La fonction f est définie sur $]-1;+\infty[$ et on note C_f sa représentation graphique.
L'axe des abscisses est la tangente à C_f au point d'abscisse 1.

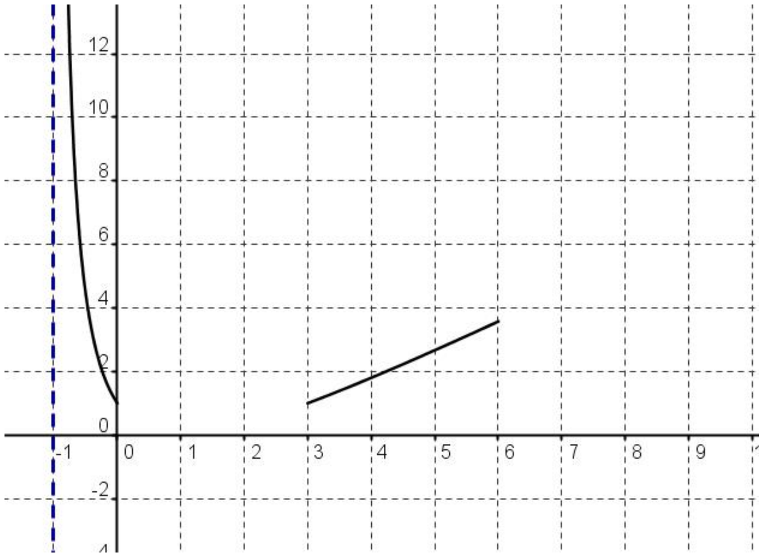
1. Justifier que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$.
2. La fonction f est de la forme $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 1}{x + 1}$ où a et b sont deux réels.
   a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{ax^2 + 2ax + b - 1}{(x+1)^2}$
   b) En déduire les valeurs de a et b
3. Pour la suite, on suppose $a = 1$ et $b = -2$
   a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.
   Interpréter ce résultat graphiquement.

b) Montrer que pour tout réel x de D_f, $f(x) = x - 3 + \dfrac{4}{x+1}$

c) En déduire que C_f admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on précisera l'équation.

d) Etudier les variations de f

e) Terminer le tracé de la courbe C_f dans le repère ci-dessous en plaçant les éléments caractéristiques obtenus aux questions



Exercice 3 (*8 points*)

Partie A

On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 4x^2 - 4$ définie sur $[0; +\infty[$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
2. Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[4; +\infty[$
4. Donner la valeur arrondie de α à l'unité près.
5. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$

Partie B

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 21x + 4}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$
et on note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$
   Interpréter graphiquement le résultat.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ et en déduire le tableau de variation de f

Partie C

Si $C(q)$ est le coût total de fabrication de q objets, on rappelle que :

- Le coût moyen unitaire de fabrication noté $C_M(q)$ lorsque l'on produit q objets est donné par : $C_M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$
- Le coût marginal $C_m(q)$ (coût supplémentaire engendré par la fabrication d'un objet supplémentaire lorsque l'on produit q objets) est : $C_m(q) = C'(q)$

Dans un atelier, on fabrique chaque jour une quantité q d'objets et le coût de fabrication, en centaines d'euros, de ces q objets est donné par $C(q) = \dfrac{1}{3}q^3 - 4q^2 + 21q + 4$.
Les contraintes de production de l'atelier ne permettent pas de produire plus de 25 objets par jour.

1. Exprimer la fonction coût moyen $C_M(q)$ en fonction de q

2. Déterminer la quantité d'objets à produire pour que le coût moyen unitaire de production soit minimum. Donner alors ce coût moyen unitaire à un euro près.

3. Exprimer le coût marginal $C_m(q)$ en fonction de q.

4. Donner les variations de $C_m(q)$ sur $[0; 25]$.

5. Après avoir identifié laquelle de chacune des courbes ci-dessous correspond à C, C_M et C_m, déterminer la relation entre le coût moyen et le coût marginal lorsque $C_M(q)$ est minimum ?