# Devoir de mathématiques $n^o$ 5 - TES

## DS commun du 09/12/2009 - 3H

### Exercice 1 (5 points)

Une enquête est réalisée auprès des clients d'une compagnie aérienne.

Elle révèle que 40 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons professionnelles, que 35 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons touristiques et le reste pour diverses raisons.

Sur l'ensemble de la clientèle, 40 % choisit de voyager en première classe et le reste en seconde classe. En fait, 60 % des clients pour raisons professionnelles voyagent en première classe, alors que seulement 20 % des clients pour raison touristiques voyagent en première classe. On choisit au hasard un client de cette compagnie.

On suppose que chaque client a la même probabilité d'être choisi.

On note :

- A l'événement "le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles" ;
- T l'événement "le client interrogé voyage pour des raisons touristiques" ;
- D l'événement "le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques" ;
- V l'événement "le client interrogé voyage en première classe".

1. Calculer $p(D)$.
2. Traduire les données de l'énoncé sur un arbre de probabilité.
3. (a) Traduire par une phrase l'événement $A \cap V$ puis calculer les probabilités $P(A \cap V)$ et $P(T \cap V)$.
   (b) Calculer $P(D \cap V)$.
   (c) En déduire $P_D(V)$, probabilité de l'événement $V$ sachant que l'événement $D$ est réalisé puis compléter les coefficients manquants sur l'arbre pondéré.
   (d) Le client a voyagé en première classe mais n'a pas noté pour quelle raison il voyageait.
   Déterminer la probabilité qu'il voyage pour des raisons touristiques.
4. On choisit successivement et au hasard 3 clients de cette compagnie aérienne.
   On suppose que le nombre de clients est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.
   (a) Calculer la probabilité de l'événement E : "les trois clients ont voyagé en premire classe".
   (b) Quelle est la probabilité qu'exactement un des trois clients ait voyagé en première classe ?
   (c) Calculer la probabilité de l'événement F : "au moins un des trois clients a voyagé en seconde classe".

### Exercice 2 (4 points)

Une urne contient des jetons bleus, des jetons verts et des jetons rouges.
10% des jetons sont bleus et il y a trois fois plus de jetons verts que de jetons bleus.
Un joueur tire un jeton au hasard.

On note : R : "le jeton tiré est rouge" ; B : "le jeton tiré est bleu" ; V : "le jeton tiré est vert".

S'il est rouge, il **remporte** le gain de base.

S'il est vert, il **remporte** le carré du gain de base.

S'il est bleu, il **perd** le cube du gain de base.

Pour pouvoir jouer, il doit **payer deux euros** et on note $g$ le gain de base.

1. La fonction $f$ est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = -0,1x^3 + 0,3x^2 + 0,6x - 1,6$.
   (a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
   (b) En déduire le maximum de $f$.
2. On cherche à déterminer la valeur $g_0$ du gain de base, telle que le bénéfice moyen réalisé sur un grand nombre de tirages soit maximal.
   (a) Compléter le tableau ci-dessous correspondant à la loi de probabilité du bénéfice du joueur :

| somme gagnée | $g-2$ | | |
|---|---|---|---|
| Probabilité | | | |

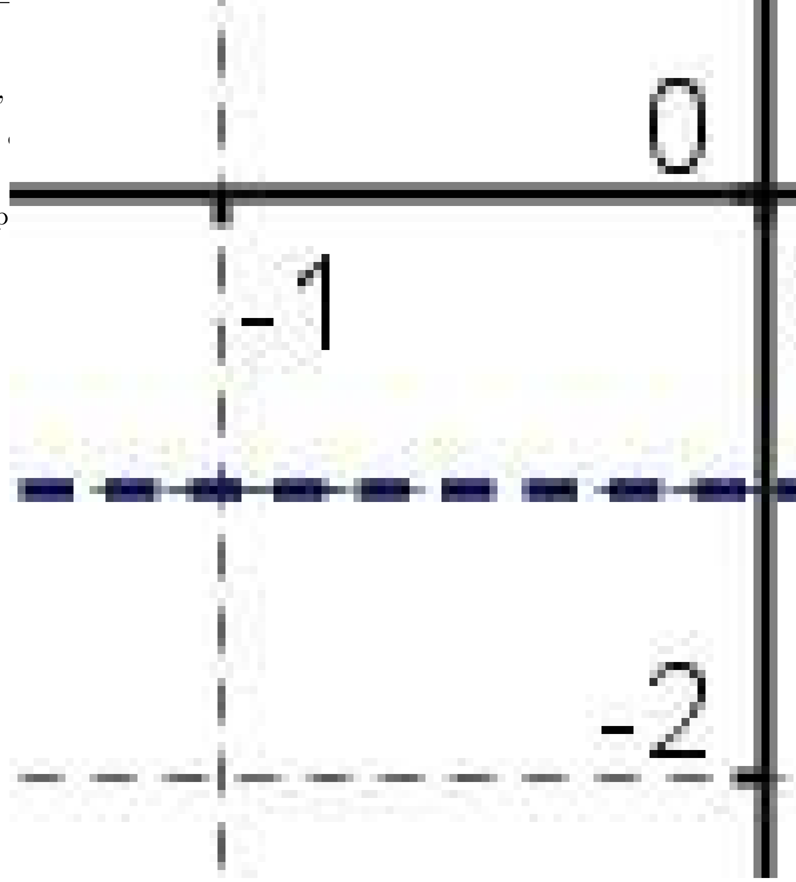
   (b) Calculer l'espérance du bénéfice du joueur.
   (c) En déduire la valeur de $g_0$. **Le résultat sera arrondi au centime d'euro.**

## Exercice 3

On rappelle que $e$ est le réel tel que $ln(e) = 1$ et que $e \simeq 2,$

La courbe $C_f$ ci-dessous représente une fonction $f$ définie
fonction dérivée de $f$ sur l'intervalle $D$.

Les axes $(Ox)$ et $(Oy)$ sont asymptotes $C_f$. La courbe $C_f$ p
tangente parallèle à $(Ox)$ au point $A$.




1. En utilisant les données ci-contre, déterminer :
   (a) $f(1)$ et $f'(1)$ ;
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ;
   (c) les solutions de l'inéquation $f'(x) > 0$.

2. On admet que, pour tout réel $x$ de l'intervalle $D$, $f(x) = \dfrac{a + blnx}{x}$ où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.
   (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction des réels $a$ et $b$.
   (b) Utiliser les résultats de la question 1.a. pour montrer que $a = -1$ et $b = -1$.
   (c) Retrouver le résultat de la question 1.c. par le calcul et dresser le tableau de variation de $f$.

## Exercice 4

(6,5 points)

**Partie A**

Soit $g$ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 1 - x^2 - lnx$

1. Calculer la dérivée de la fonction $g$. En déduire les variations de la fonction $g$.
2. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de $g(x)$ pour $x$ appartenant l'intervalle $]0; +\infty[$ .

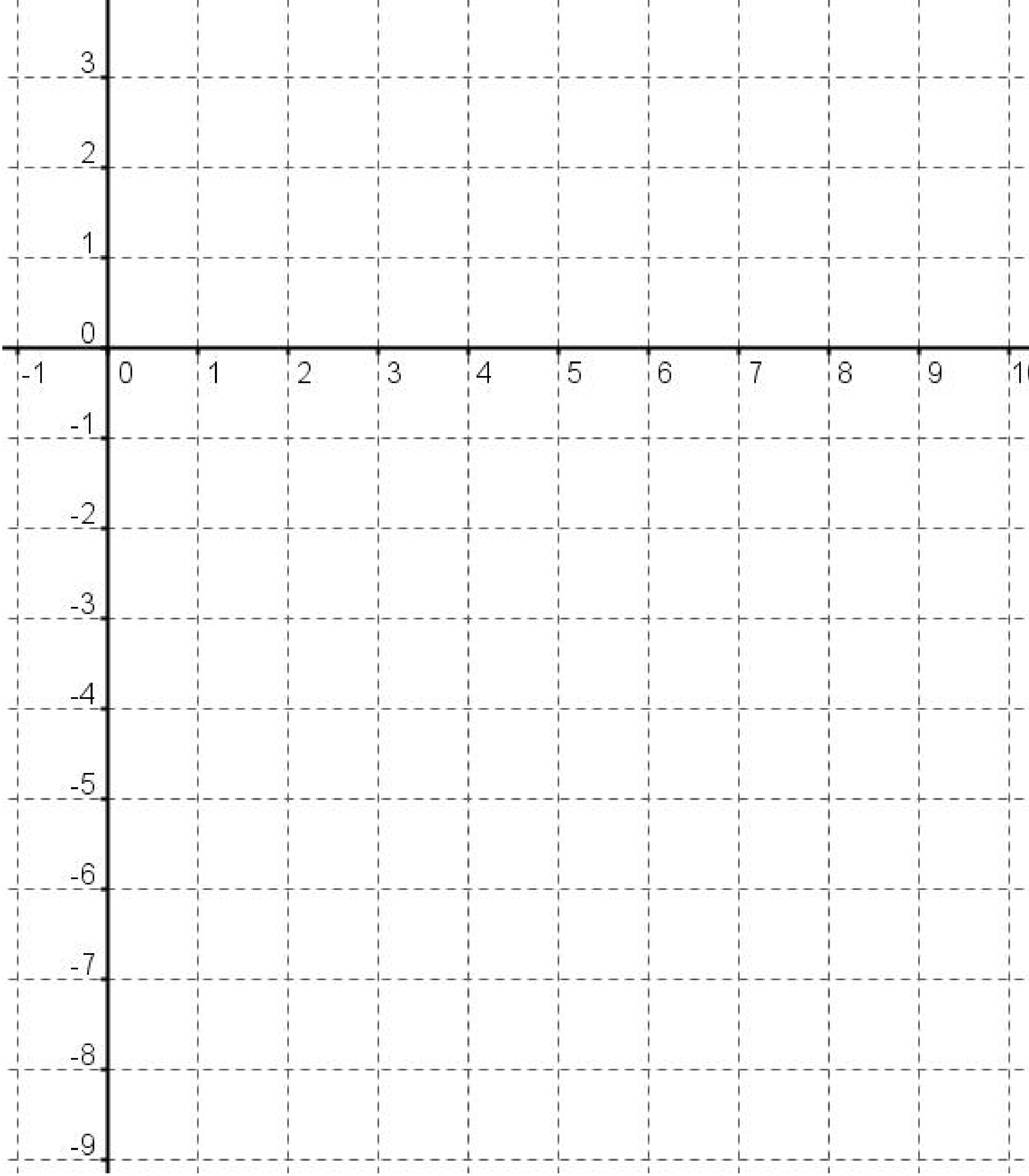
**Partie B**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{lnx}{2x} - \frac{x}{2} + 1$$

et on note $C_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Calculer la limite de $f$ en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{lnx}{x} = 0$. Calculer la limite de $f$ en $+\infty$.
3. Montrer que la droite $D$ d'équation $y = -\dfrac{x}{2} + 1$ est asymptote à la courbe $C_f$ en $+\infty$.
4. Calculer les coordonnées du point $A$, intersection de la droite $D$ et de la courbe $C_f$.
5. Montrer que pour tout réel $x$ appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.
6. En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de la fonction $f$.
7. Tracer la droite $D$ et la courbe $C_f$ dans le repère fourni en annexe.



3
2
1
0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9