Devoir de mathématiques n^o 6 - TES

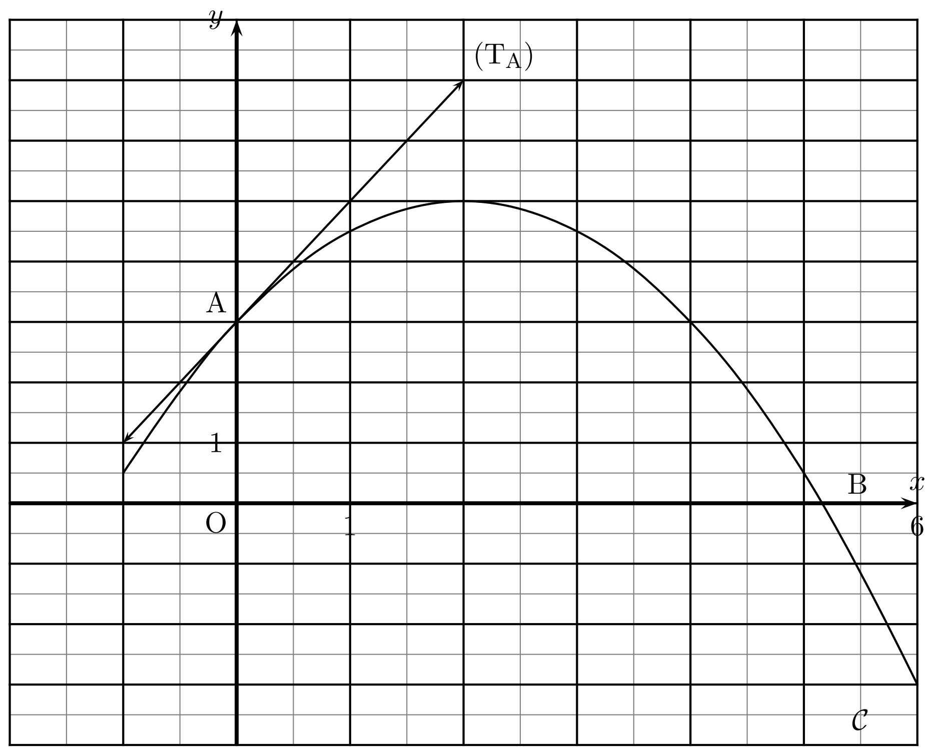
15 janv 2010 - 1H

Exercice 1 (7 points)

La courbe $\mathcal{C}$ représente, dans le plan muni d'un repère orthogonal, une fonction f définie dans l'intervalle $[-1\ ;\ 6]$. On sait que la courbe $\mathcal{C}$:

- coupe l'axe des ordonnées au point A d'ordonnée 3, et l'axe des abscisses au point B d'abscisse b ;
- admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 2 ;
- admet la droite T_{A} pour tangente au point A.

Partie A : Etude graphique de la fonction f



1. Lire graphiquement : $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(5)$ et $f(6)$.
2. Résoudre graphiquement sur $[-1\ ;\ 6]$: $f(x) > 0$
3. Déterminer graphiquement : $f'(0)$ et $f'(2)$.

Partie B : Etude de la fonction $g = \ln f$

On étudie maintenant la fonction g qui à x associe $g(x) = \ln[f(x)]$.

1. Préciser l'intervalle de définition I de la fonction g.
2. Déterminer la limite de la fonction g quand x tend vers b.
3. Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle I.
4. Calculer $g'(0)$ puis $g'(2)$.
5. Résoudre dans I, l'inéquation $g(x) \geqslant -\ln 2$.

Exercice 2 (4 points)

1. Trouver le plus petit entier n qui vérifie : $1 - 0.92^n \geq 0.99$.
2. Résoudre l'équation : $\ln(x-2) + \ln(x+3) = \ln 6$.

Exercice 3 (9 points)

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire g définie sur $[2;20]$ par

$$g(x) = x - 2 - 2\ln(x)$$

1. Etudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations.
2. Montrer que la fonction g s'annule exactement une fois sur $[2;20]$; indiquer la valeur arrondie au dixième de ce nombre. En déduire le signe de la fonction g sur $[2;20]$.

Partie B : Etude de la fonction f définie sur $]2;20]$ par

$$f(x) = \frac{x\ln x}{x-2}$$

Le plan est rapporté à un repère orthogonal ; $\mathscr{C}$ désigne la courbe représentative de la fonction f.

1. Montrer que la dérivée $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x-2)^2}$ sur $]2;20]$; en déduire les variations de f.
2. Déterminer la limite de f en 2 et interpréter graphiquement ; dresser le tableau de variations de f.
3. Construire $\mathscr{C}$ dans le repère ci-dessous.