Devoir de mathématiques n^o 7 - TES

3 fev 2010 - 1H

Exercice 1 **10 points**

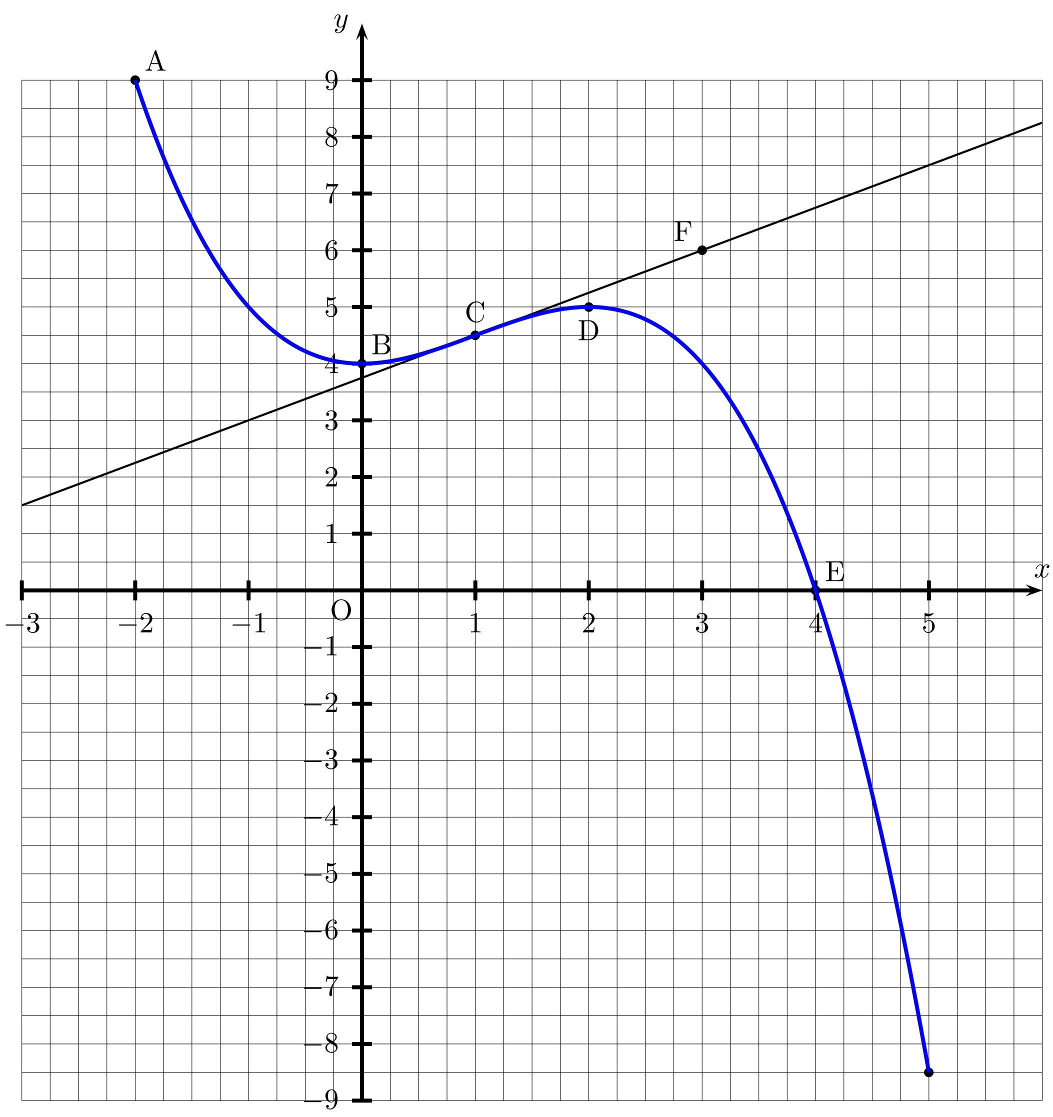
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$, décroissante sur chacun des intervalles $[-2\ ;\ 0]$ et $[2\ ;\ 5]$ et croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$. On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$.

La courbe (Γ) représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal. Elle passe par les points $A(-2\ ;\ 9)$, $B(0\ ;\ 4)$, $C(1\ ;\ 4,5)$, $D(2\ ;\ 5)$ et $E(4\ ;\ 0)$.

En chacun des points B et D, la tangente à la courbe (Γ) est parallèle à l'axe des abscisses.

On note F le point de coordonnées $(3\ ;\ 6)$. La droite (CF) est la tangente à la courbe (Γ) au point C.

1. A l'aide des informations précédentes et du graphique, préciser :
   (a) les valeurs de $f(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
   (b) le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$.
   (c) le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$.
2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln(f(x))$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
   (a) Expliquer pourquoi la fonction g est définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4[$.
   (b) Calculer $g(-2)$, $g(0)$ et $g(2)$.
   (c) Préciser, en le justifiant, le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4[$.
   (d) Déterminer la limite de la fonction g lorsque x tend vers 4.
   Interpréter ce résultat pour la représentation graphique de la fonction g.
   (e) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

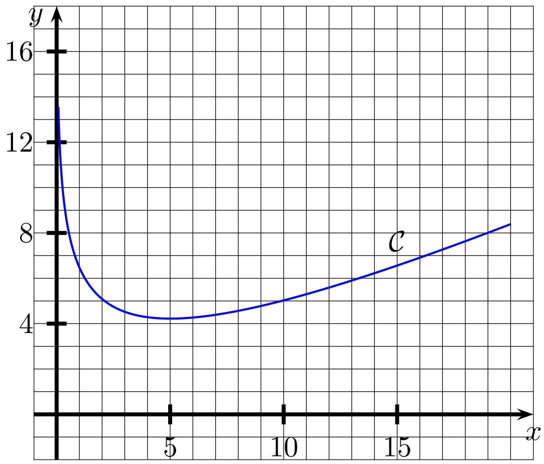


Exercice 2 **10 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~20]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 4 + \frac{3}{4}\ln(4x + 10) - 3\ln x.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe ci-dessous représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.



Partie A

1. Déterminer la limite de f en 0. Quelle interprétation graphique peut-on en donner ?
2. Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0~;~20]$,
$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x(2x + 5)}$.
3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0~;~20]$ et dresser son tableau de variations.

On admet que l'équation $f(x) = 6$ possède exactement deux solutions α et β dans l'intervalle $]0~;~20]$ telles que $\alpha \approx 1,242$ et $\beta \approx 13,311$.

Partie B

Une entreprise produit au maximum 20 000 objets par jour.
On note x le nombre de milliers d'objets produits chaque jour travaillé : $x \in]0~;~20]$.
On admet que le coût moyen de fabrication, exprimé en euros, d'un objet est égal à $f(x)$, où f est la fonction définie ci-dessus.

1. (a) Pour combien d'objets produits le coût moyen de fabrication est-il minimal ?

   (b) Déterminer ce coût moyen minimal, arrondi au centime.
2. Le prix de vente d'un objet est de 6 €. Pour quelles productions journalières l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
3. Déterminer le bénéfice journalier, arrondi à la centaine d'euros, pour une production de 5 000 objets par jour.
4. L'année suivante, le coût moyen augmente de 2 %. Le prix de vente est alors augmenté de 2 %. Le bénéfice journalier reste-t-il identique ? Justifier. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*