BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

24 février 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 7

Ce sujet comporte 5 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 5

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 — 4 points

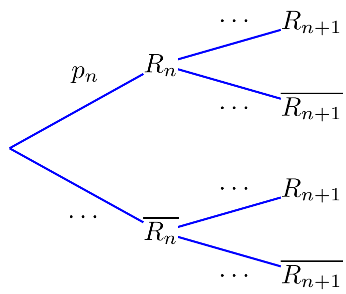
Commun à tous les candidats

Un employé se rend à son travail. S'il est à l'heure il prend le bus de ramassage gratuit mis à disposition par l'entreprise, s'il est en retard il prend le bus de la ville et il lui en coûte 1,50 €.
Si l'employé est à l'heure un jour donné, la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est 0,3 et s'il est en retard un jour donné la probabilité qu'il soit en retard le lendemain est 0,8.

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle R_n l'évènement « l'employé est en retard le jour n ». On note p_n la probabilité de l'évènement R_n. On suppose que le premier jour l'employé est à l'heure et donc $p_1 = 0$.

Si nécessaire les résultats seront arrondis au millième.

1. a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité, et interpréter le résultat.
   b) Sachant que le salarié n'est pas en retard le troisième jour, déterminer la probabilité qu'il n'ait pas aussi été en retard le deuxième jour.
2. a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



   b) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}3$.
3. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = p_n - 0.6$.
   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   b) Exprimer v_n puis p_n en fonction de n.
   c) Justifier que la suite (p_n) est convergente et calculer sa limite.
4. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

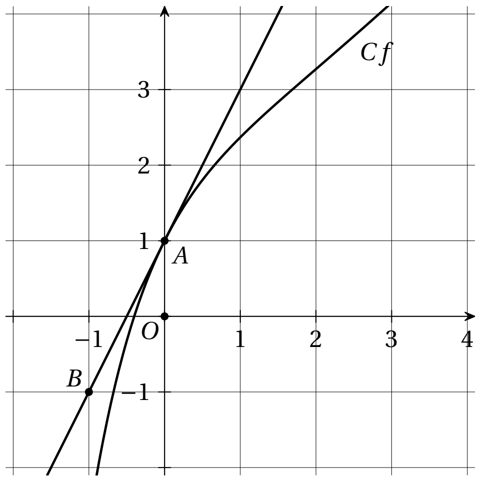
Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0
	J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que P $< 0{,}6 - 10^{-\mathrm{K}}$
	P prend la valeur $0{,}5 \times \mathrm{P} + 0{,}3$
	J prend la valeur J +1
	Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

Exercice 2 — 6 points

Commun à tous les candidats

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et la droite (AB) tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $A(0;1)$.
Le point B a pour coordonnées $(-1;-1)$.



Partie A

En utilisant les données de l'énoncé, déterminer la valeur des réels a et b tels que pour tout réel x,

$$f(x) = ax + b + \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$

Partie B

Pour la suite, on admet que $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$ pour tout réel x.

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^x.$$

   Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
2. En déduire le signe de $g(x)$.
3. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
4. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} g(x).$$

5. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
6. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
7. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x + 1$.
   a) Montrer qu'il existe une unique tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$, parallèle à $\mathcal{D}$, en un point E dont on précisera les coordonnées.
   b) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe. Le graphique sera fait **sur une feuille de papier millimétré** et **complété au fur et à mesure des questions**.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
   Ecrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.
   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive). On laissera les traits de construction apparents.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

   $$|f(z) - 8| = 3.$$

   Prouver que (F) est le cercle de centre Ω d'affixe -1 et de rayon $\sqrt{3}$.
   Tracer (F) sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.
   a) Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

   $$x^2 - y^2 + 2x + 9 + \mathrm{i}(2xy + 2y).$$

   b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique en traçant ces droites.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Exercice 4 — 5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$.

En effectuant un changement de variable, démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$

.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.
   Montrer que la fonction g est positive sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. a) Montrer que, pour tout x de $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b) En déduire le sens de variation de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.
   c) Justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$.
   On dit que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
   d) Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.
3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.
   a) Exprimer les coordonnées des points M_k et N_k en fonction de k.
   b) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.
   c) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.