

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

4 mai 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures
Coefficient : 7

Ce sujet comporte 5 pages (y compris celle-ci) numérotées de 1 à 5

L'emploi des calculatrices est autorisé, dans les conditions prévues par la réglementation en vigueur.

Le candidat doit traiter les quatre exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points $A(0 ; 4 ; 1)$, $B(1 ; 3 ; 0)$, $C(2 ; -1 ; -2)$ et $D(7 ; -1 ; 4)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 3)$.
 - a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
 - b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
 - c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ .
 - d) Déterminer les coordonnées du point H , intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.
 - a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
 - b) Vérifier que la droite d , intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= -4t - 2 \\ y &= t \\ z &= 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles?

Exercice 2

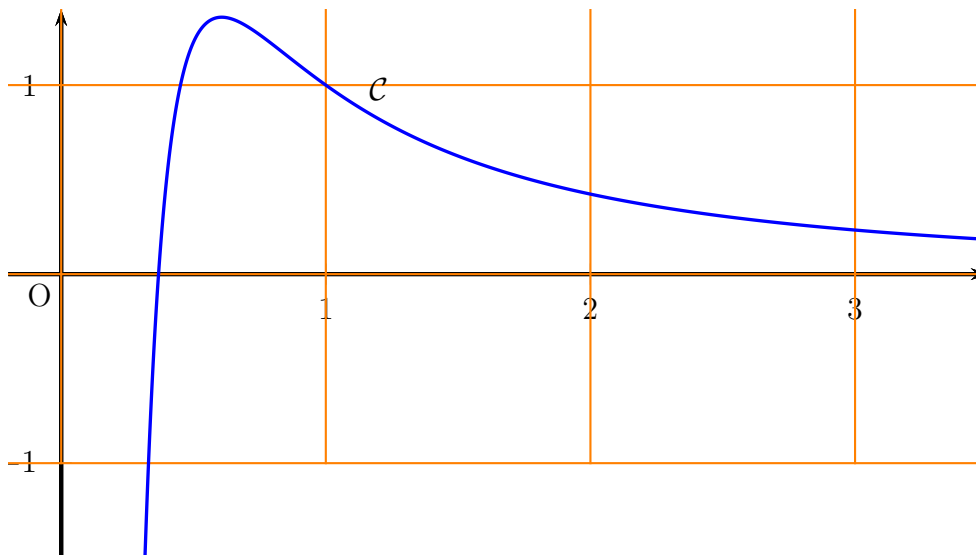
5 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous :



1. a) Étudier la limite de f en 0.
b) Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.
2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

- b) Résoudre sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ l'inéquation $-1 - 2\ln(x) > 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- c) Dresser le tableau des variations de la fonction f .
3. a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = n$.
a) Démontrer que $0 \leq I_2 \leq e - \frac{1}{2}$.
On admet que la fonction F , définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $F(x) = \frac{-2 - \ln(x)}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
b) Calculer I_n en fonction de n .
c) Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice 3

5 points

Commun à tous les candidats

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n. \end{cases}$$

1. a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

- b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .
2. a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

- b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n) .
Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

- a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n) .
- b) En déduire, que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

- c) Déterminer la limite de la suite (u_n)
4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que ...	(1)
	n prend la valeur ...	(2)
	u prend la valeur ...	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

Exercice 4

5 points

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z différente de -1 , fait correspondre le point M' d'affixe

$$\frac{1}{z+1}$$

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_A = -\frac{1}{2}, \quad z_B = -\frac{1}{2} + i \quad \text{et} \quad z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

- a) Placer les trois points A, B et C sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique.
 - b) Calculer les affixes des points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$, et placer les points A' , B' et C' sur la figure.
 - c) Démontrer que les points A' , B' et C' ne sont pas alignés.
2. Soit g la translation du plan qui, à tout point M d'affixe z , fait correspondre le point M_1 d'affixe $z + 1$.
- a) Sans donner d'explication, placer les points A_1 , B_1 et C_1 , images respectives par g de A, B et C, et tracer la droite $\mathcal{D}_1$, image de la droite $\mathcal{D}$ par g .
 - b) À l'aide de la figure, déterminer l'affixe du vecteur de cette translation g .
 - c) Démontrer que $\mathcal{D}_1$ est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - 1| = |z|$.
3. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M_2 d'affixe $\frac{1}{z}$.
- a) Justifier que $h(A_1) = A'$, $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.
 - b) Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z , on a :

$$\left| \frac{1}{z} - 1 \right| = 1 \iff |z - 1| = |z|.$$

- c) En déduire que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est incluse dans un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.
On admet que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est le cercle $\mathcal{C}$ privé de O .
4. Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathcal{D}$.