Devoir n°3 - Etude de fonctions - Continuité - TS

22 octobre 2014 - 2h

Exercice 1 (3 pts) : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x - 6}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 10 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue au point d'abscisse 2 ?

Exercice 2 (3 pts) : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Démontrer que f est continue sur $\mathscr{D}_f$.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.

Exercice 3 (6 pts) : Soit f la fonction définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$$

1. On appelle g la fonction définie sur I par $g(x) = \tan x - x$.
   a) Montrer que g est impaire.
   b) Dresser le tableau de variations de g.
   c) Calculer $g(0)$ et déterminer le signe de $g(x)$ sur I.
2. a) Calculer la dérivée f' de f sur I, et montrer que $f'(x) = (\tan x + x)g(x)$.
   b) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout x de I.
   c) En déduire les variations de f sur I.

Exercice 4 (8 pts) :

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = x^3 - 3x - 4$$
   a) Démontrer que $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$ que l'on appellera α. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.
   b) Donner le signe de g sur $]1; +\infty[$.
2. Soit f définie sur $D =]1; +\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$$
   a) Montrer que f' et g ont même signe sur D .
   b) Dresser le tableau de variations de f.
   c) Donner une valeur approchée à 10^{-1} de $f(\alpha)$.
   d) Déterminer l'équation de (T), la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.