Devoir n°5 - Fonctions ln et exponentielle - TS

17 décembre 2014 - 2h

Exercice 1 (8.5 pts) :
Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**
   a) Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

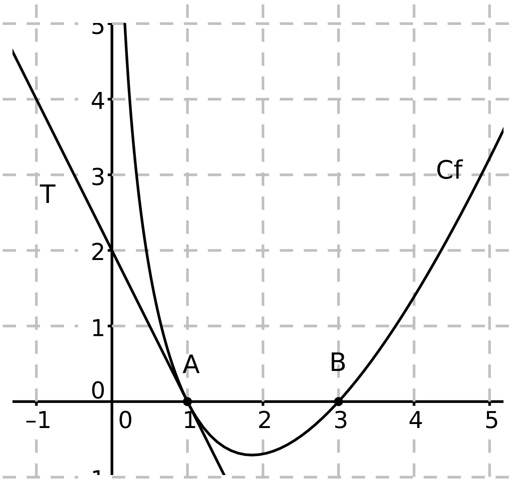
   $$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

   Étudier le sens de variation de la fonction g.
   b) Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   Déterminer un encadrement de a à 10^{-3}.
   c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. **Étude de la fonction f**
   a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel

   $$m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$$

   e) Justifier que $3{,}43 < m < 3{,}45$

Exercice 2 (4 pts) :



Sur le graphique ci-contre, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (ax+b)\ln x$$

où a et b sont deux réels donnés.
La courbe passe par les points $A(1;0)$ et $B(3;0)$.
La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 coupe l'axe des abscisses au point d'ordonnée 2.

Calculer a et b.

Exercice 3 (7.5 pts) : Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

1. a) Étudier la limite de f en 0.
   b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
   c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$.
2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1-2\ln(x)}{x^3}.$$

   b) Résoudre sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln(x) > 0$.
   En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   c) Dresser le tableau des variations de la fonction f.
3. a) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.
   b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.