Devoir n°6 - Probabilités - TS

27 janvier 2015 - 1h

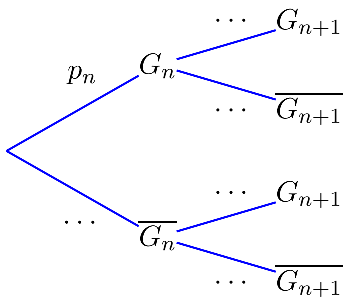
Exercice 1 (11 pts) :
Max joue n parties successives sur sa console de jeu.
On admet que la probabilité qu'il gagne la première partie est 0,1, et que :

- s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,6.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note G_n l'évènement « Max gagne la n-ième partie » et on pose $p_n = p(G_n)$.

1. a) Construire un arbre pondéré pour les deux premières parties.
   b) Calculer p_2.

2. a) Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



   b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$p_{n+1} = 0{,}2 p_n + 0{,}6$$

   .

   c) Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par

$$u_n = p_n - 0{,}75$$

   est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   d) En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.
   e) Montrer la suite (p_n) est croissante.
   f) Déterminer la limite de la suite (p_n).

3. Max peut-il espérer, en jouant suffisamment longtemps, avoir trois chances sur quatre de gagner la partie ?

Exercice 2 (9 pts) :

Dans cet exercice, les résultats seront approchés à 0,000 1 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1% est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85% des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95% des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note les évènements :

- M : « L'animal est porteur de maladie » ;
- T : « Le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. On choisit un animal au hasard.
   a) Décrire l'évènement $M \cap T$ et calculer sa probabilité.
   b) Montrer que la probabilité pour que le test soit positif est 0,058.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif.
   Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie ?

4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
   a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
   b) Quelle est la probabilité pour que deux animaux exactement aient un test positif ?
   c) Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?

5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 €, et le coût d'abattage d'un animal est de 1 000 €. On suppose que le test est gratuit.
   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager pour un animal subissant le test est donné par le tableau suivant :

Coût (en €)	0	100	1 000
probabilité	0,940 5	0,058	0,001 5

   a) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant le coût à engager.
   b) Un éleveur possède un troupeau de 20 bêtes.
   Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?