**Devoir n°9 - Calcul intégral - TS**

21 avril 2015 - 1h

**Exercice 1 (6 points) :** Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$I = \int_1^6 \frac{1}{(x-3)^3}\,dx \qquad J = \int_{-1}^2 \frac{1}{3x+5}\,dx \qquad K = \int_{-1}^1 xe^{3x^2-1}\,dx$$

**Exercice 2 (14 points) :** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On note $f_n$ la fonction définie pour tout réel $x$ de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre $I_n$ par

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$$

Les représentations graphiques de certaines fonctions $f_n$ obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.

1. a) En expliquant votre démarche, conjecturer le sens de variation de la suite $(I_n)$.

   b) Démontrer cette conjecture.

2. Calculer la valeur exacte de $I_1$.

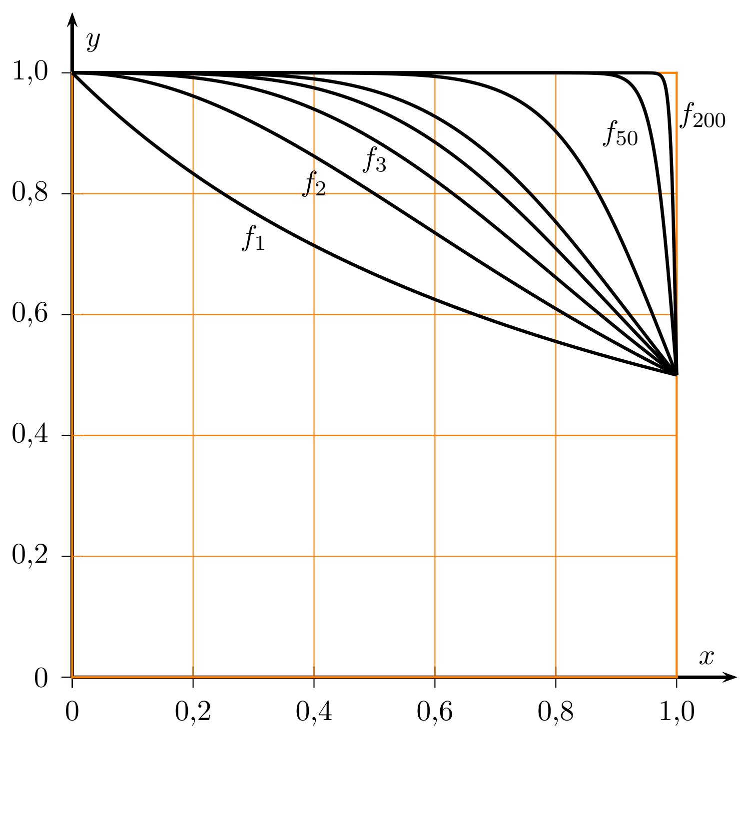
3. a) Démontrer que, pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$

   b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $I_n \leqslant 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $1 - x^n \leqslant \dfrac{1}{1+x^n}$.

5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)\,\mathrm{d}x$.

6. À l'aide des questions précédentes, encadrer $I_n$ pour tout entier naturel $n \geq 1$,
   démontrer que la suite $(I_n)$ est convergente et déterminer sa limite.



**Exercice 3 (bonus) :** On considère la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx.$$

1. a) Montrer $u_0 + u_1 = 1$.
   b) Montrer que $u_1 = 1 - \ln(2/(1+e))$ et en déduire $u_0$.
2. a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n \geq 0$.
   b) Montrer pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n + u_{n+1} = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.
   c) En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.
3. Prouver que $(u_n)$ converge vers une limite à déterminer.