Devoir n°10 - Intégration - TS

16 mars 2016 - 1h

Exercice 1 (2,5 pts) : Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^3} \text{ sur } [0;+\infty[\qquad\qquad g(x) = \frac{x}{\sqrt{3x^2+2}} \text{ sur } \mathbb{R}$$

Exercice 2 (4 pts) : Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx \qquad\qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x)^3}\,dx$$

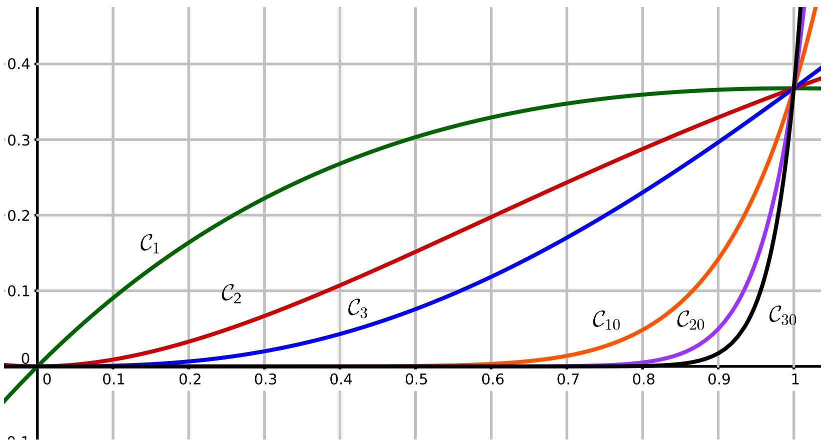
Exercice 3 (13,5 pts) : Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n, définie sur $[0;1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x}$$

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$$

1. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax+b)e^{-x}$, avec a et $b \in \mathbb{R}$.
   Déterminer a et b pour que F soit une primitive de f_1 ; en déduire la valeur de I_1.
2. On a tracé ci-dessous $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_{10}$, $\mathcal{C}_{20}$ et $\mathcal{C}_{30}$.



   a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant la démarche.
   Démontrer cette conjecture.

   b) En déduire que la suite (I_n) converge.

   c) Montrer que pour tout n non nul, $f_n(x) \leq x^n$ sur $[0;1]$.

   d) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 4 (Bonus) : On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{1-x}$$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ci-dessous.

1. Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x (t-1)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t$$

   a) Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.
   b) Vérifier que $G(x) = -xe^{1-x}$ est une primitive de f sur $[1\ ;\ +\infty[$;
   en déduire que pour tout réel $x \in [1; +\infty[$, $F(x) = 1 - x\mathrm{e}^{1-x}$.

2. Soit un réel a supérieur ou égal à 1. On considère la partie $\mathcal{D}_a$ du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.
   a) Hachurer $\mathcal{D}_4$ sur le graphique.
   b) Exprimer l'aire, en unités d'aires, de $\mathcal{D}_a$, en fonction de a.
   c) Déterminer $\lim\limits_{a \to +\infty} F(a)$ et interpréter graphiquement.