Devoir n°5 - Continuité - Dérivabilité - TS

19 novembre 2015 - 2h

Exercice 1 (5 pts) : Déterminer la limite de chaque fonction à l'endroit indiqué, et préciser l'asymptote s'il y a lieu.

$f_1(x) = x + 2\sin x$; en $+\infty$

$f_2(x) = \sqrt{\dfrac{x+5}{4x+1}}$; en $+\infty$

$f_3(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; en $-\infty$

$f_4(x) = 2x\sin(\dfrac{-1}{x})$; en $+\infty$

Exercice 2 (2 pts) : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ m & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

Quelle valeur doit-on donner à m pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 (3 pts) : Etudier la dérivabilité de chacune des fonctions suivantes sur $[1; +\infty[$.

1. $f(x) = x\sqrt{x-1}$.
2. $g(x) = (x-1)\sqrt{x-1}$.

Exercice 4 (10 pts) : Partie A : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 4x^3 - 3x - 8$$

1. Etudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note α. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Soit la fonction f définie sur $]\dfrac{1}{2}; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) Déterminer la limite de f en $\dfrac{1}{2}$; que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
2. a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(4x^2-1)^2}$.
   b) Dresser le tableau de variations de f.
3. En utilisant la définition de α, montrer que $f(\alpha) = \dfrac{3}{8}\alpha$; en déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2}.
4. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \dfrac{1}{4}x$. (on pourra s'aider de la calculatrice)
   a) Conjecturer les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.
   b) Pour tout réel $x > \dfrac{1}{2}$, on considère les points M et N d'ascisses x respectivement sur $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$. Que peut-on conjecturer sur la distance MN lorsque x tend vers $+\infty$?
   c) Démontrer les conjectures précédentes.