Correction du devoir n°6 - TS

Ex 1 : 1) $e^x + 2e^{-x} = 3 \iff e^x + \dfrac{2}{e^x} = 3$ /6

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\iff \dfrac{(e^x)^2 + 2 - 3e^x}{e^x} = 0$

$\iff (e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0$

$\iff (e^x - 1)(e^x - 2) = 0$

$\iff e^x = 1$ ou $e^x = 2$

$\iff x = 0$ ou $x = \ln 2$

$S = \{0 ; \ln 2\}$

2) $(e^x - 1)(3 - e^x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$

$e^x - 1 \geqslant 0$ $\qquad$ $3 - e^x \geqslant 0$

$\iff e^x \geqslant 1$ $\qquad$ $\iff 3 \geqslant e^x$

$\iff x \geqslant 0$ $\qquad$ $\iff \ln 3 \geqslant x$

$x \mapsto \ln x$ strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3 - e^x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(e^x - 1)(3 - e^x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$x \mapsto e^x$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$S = [0 ; \ln 3]$

Ex 2 : **A** $g(x) = e^x - xe^x + 1$ définie sur $[0 ; +\infty[$ /6 6,75

1) $g(x) = e^x(1 - x) + 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$

Par produit & somme $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$ 1

2) g dérivable sur $[0 ; +\infty[$ comme produit et somme

0,25 0,75 $g'(x) = e^x - (1 \times e^x + x e^x) = -xe^x$

$-x \leqslant 0$ et $e^x > 0$ sur $[0 ; +\infty[$ donc

1 $\quad$ 0,25 + 0,75 + 0,5 + 0,5

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$

3) g continue sur $[0 ; +\infty[$
g strictement décroissante
$g(0) = 2$ (>0) et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ 0,75 + 0,5 1,5

d'après la conséquence du théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[0 ; +\infty[$

d'après la calculatrice $g(1,27) > 0$, $g(1,28) < 0$ donc $1,27 < \alpha < 1,28$ 0,5 + 0,5

0,75

4) $g(\alpha) = 0 \iff e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 = 0 \iff (1 - \alpha)e^\alpha = -1$

0,5 $\iff e^\alpha = \dfrac{-1}{1 - \alpha} \iff e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ 0,75

5) g strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ donc

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

0,5

B $f(x) = \frac{4x}{e^x+1}$ définie sur $[0;+\infty[$ 14 4,75

1) $f(x) = \frac{x \times 4}{x \times (\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x})} = \frac{4}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}}$ $x \neq 0$ 0,5

1,25 1

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ croissances comparées

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Par somme et quotient $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

2) f dérivable sur $[0;+\infty[$ comme quotient

0,25 +1 $f'(x) = \frac{4(e^x+1) - 4xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{4(e^x - xe^x + 1)}{(e^x+1)^2} = \frac{4\ g(x)}{(e^x+1)^2}$

+0,5 0,75 $4 > 0$ et $(e^x+1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $[0;+\infty[$

3)

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow 0$

0,5

C $h(x) = \frac{4}{e^x+1}$ définie sur $[0;+\infty[$ 14

1) $M(x; h(x))$ L'aire du rectangle OPMQ est

$P(x;0)$ $OP \times QO = x \times h(x) = f(x)$

$Q(0; h(x))$ $= \frac{4x}{e^x+1}$ $x \geq 0$

$O(0;0)$ D'après la question précédente 1,5

l'aire est maximale pour $x = \alpha$

0,75 0,5 $f(\alpha) = \frac{4\alpha}{e^\alpha+1} = \frac{4\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1} = \frac{4\alpha}{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \boxed{4(\alpha-1)}$

$1,27 < \alpha < 1,28 \Rightarrow 1,08 < f(\alpha) < 1,12$

0,5 l'aire est entre 1,08 et 1,12 unités d'aire

2) $M(\alpha; h(\alpha))$ $h'(\alpha) = \frac{-4e^\alpha}{(e^\alpha+1)^2} = \frac{-4}{\alpha-1} \times \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2} = \frac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}$

coefficient directeur de (T)

2 $\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{h(\alpha)}{-\alpha} = \frac{4}{-\alpha(e^\alpha+1)} = \frac{4}{-\alpha \times \frac{\alpha}{\alpha-1}} = \frac{-4(\alpha-1)}{\alpha^2}$ coefficient directeur de (PQ)

coeff égaux donc $(T) // (PQ)$ pour $x = \alpha$