Devoir n°6 - Exponentielle - TS

16 décembre 2015 - 1h

Exercice 1 (5 pts) :

1. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$: $e^x + 2e^{-x} = 3$
2. Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$: $(e^x - 1)(3 - e^x) \geq 0$

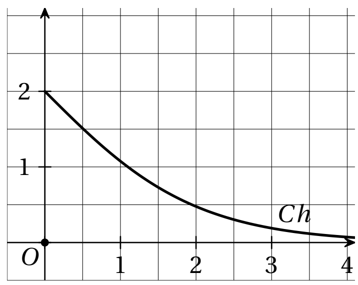
Exercice 2 (15 pts) :
Partie A : Soit la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0; ,+\infty[$ que l'on note α ; déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. Montrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$.

Partie B : Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x}{e^x + 1}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ pour $x \geq 0$.
3. Dresser le tableau de variations de f ; montrer que $f(\alpha) = 4(\alpha - 1)$.

Partie C : On considère la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{4}{e^x + 1}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h dans un repère orthonormal.



Pour tout réel $x \geq 0$, on note :
M le point de $\mathcal{C}$ de coordonnées $(x; h(x))$,
P le point de coordonnées $(x; 0)$,
et Q le point de coordonnées $(0; h(x))$.

1. Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α et donner un encadrement de cette aire (en unités d'aire).
2. *Dans cette question, toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Si le point M a pour abscisse α, la tangente (T) en M à la courbe est-elle parallèle à la droite (PQ) ?