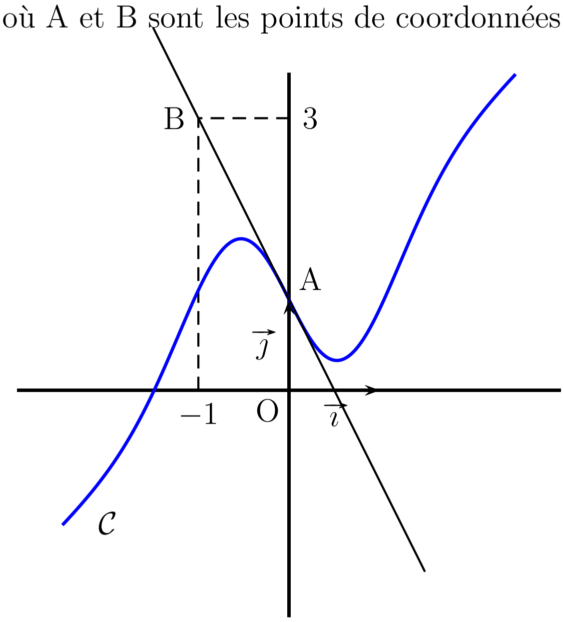
Devoir n°7 - Exponentielle - Ln - TS

14 janvier 2016 - 2h

Exercice 1 (6 pts) : Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, une courbe $\mathcal{C}$ et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0\,;\,1)$ et $(-1\,;\,3)$.



On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est $\mathcal{C}$.
On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 + ax\mathrm{e}^{-x^2}.$$

1. a) Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point A.
   b) Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
   c) Démontrer que pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 - a\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

   d) On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.
   Déterminer la valeur du réel a.

2. D'après la question précédente, pour tout réel x,

$$f(x) = x + 1 - 3x\mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{et} \quad f'(x) = 1 + 3\left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

   a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b) Justifier que pour tout réel $x \in]-1\,;\,0]$, $f(x) > 0$.
   c) Justifier que pour tout réel $x \in]-\infty; -1]$, on a $f'(x) > 0$.
   d) Montrer alors qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $]-\infty; -1]$ tel que $f(c) = 0$,
   et en déduire que c est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]-\infty; 0]$.

Exercice 2 (4,5 pts) : Résoudre

(E_1) : $\ln(x+4)+\ln(x+1)=\ln(x+9)$ $\qquad$ (E_2) : $(\ln x)^2+\ln x-12>0$

Exercice 3 (9,5 pts) : Soit f la fonction définie sur $I =]0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\ln x}{1+x}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1. Soit g la fonction définie sur I par :

$$g(x)=1+x-x\ln x$$

   a) Etudier les limites de g en 0 et en $+\infty$.
   b) Etudier les variations de g et construire son tableau de variation.
   c) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur I.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   d) En déduire le signe de g sur I.

2. a) Restitution organisée de connaissances :
   On rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$; démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$.
   b) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$, et interpréter graphiquement.
   c) Montrer que pour tout $x\in I$,

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x(1+x)^2}$$

   d) En déduire le signe de f' et dresser le tableau de variation de f sur I.
   e) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$.
   f) Déterminer une équation de la tangente T de $\mathscr{C}$ au point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe de abscisses.